



Une stratégie de décomposition de domaine mixte et multiéchelle pour le calcul des assemblages.

Geoffrey Desmeure

► To cite this version:

Geoffrey Desmeure. Une stratégie de décomposition de domaine mixte et multiéchelle pour le calcul des assemblages.. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Université Paris Saclay (COMUE), 2016. Français. NNT : 2016SACLN011 . tel-01344041

HAL Id: tel-01344041

<https://theses.hal.science/tel-01344041>

Submitted on 11 Jul 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2016SACLN011

THESE DE DOCTORAT
DE
L'UNIVERSITE PARIS-SACLAY
PREPAREE A
L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN

ECOLE DOCTORALE N° 579
Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences
Mécanique des solides

Par

M. Geoffrey Desmeure

Une stratégie de décomposition de domaine mixte et multiéchelle
pour le calcul des assemblages.

Thèse présentée et soutenue à Cachan, le 18/02/2016 :

Composition du Jury :

M., Feyel, Frédéric	Safran Tech	Président
M., Dureisseix, David	LaMCoS, INSA de Lyon	Rapporteur
M., Iordanoff, Ivan	Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers	Rapporteur
M., Rey, Christian	LMT Cachan	Directeur de thèse
M., Gosselet, Pierre	LMT Cachan	Examineur
M., Cresta, Philippe	Airbus Group Innovations	Examineur

A Juan, mon grand-père.

Table des matières

Table des matières	vii
Introduction	1
1 Représentation des quantités d'interface dans les méthodes de décomposition de domaines	5
1.1 Problème type de mécanique traité dans cette étude	5
1.1.1 Problème type visé	6
1.1.2 Cadre formel pour les méthodes de décomposition de domaine	8
1.2 Traitement des interfaces de conditions cinématiques	11
1.2.1 Interfaces de lien parfait	11
1.2.2 Interfaces de contact	24
1.3 Traitement continu et discrétisé des interfaces de comportement	26
1.3.1 Principe et utilisation de quantités d'interface spécifiques	26
1.3.2 Algorithme de résolution	27
1.3.3 Choix des champs de discrétisation	28
1.3.4 Problème grossier et quantités macro	31
2 Une méthode de décomposition de domaine mixte pour le calcul des assemblages	37
2.1 Écriture de la méthode sous forme continue	38
2.1.1 Ecriture continue du problème décomposé	38
2.1.2 Choix d'un représentant de l'effort d'interface	39
2.1.3 La fermeture du système : équations de directions de recherche	40
2.1.4 Formulation continue d'une itération sur un exemple linéaire à interfaces parfaites	41
2.2 Formulation discrétisée de la méthode proposée	42
2.2.1 Choix de discrétisation	42

2.2.2	Opérateurs discrétisés de la méthode	42
2.2.3	Formulation discrète d'une itération de la méthode sur un exemple linéaire à interface parfaite	45
2.3	Ajout d'une deuxième échelle pour l'extensibilité	48
2.3.1	Principe général	48
2.3.2	Ecriture sur-condensée du problème macroscopique	48
2.3.3	Résolution du problème macroscopique	51
2.4	Traitement des interfaces de contact	53
2.4.1	Formulation du problème de contact dans le cadre de la méthode développée	53
2.4.2	Résolution du problème discret	55
3	Calcul du produit scalaire de $H^{1/2}$	57
3.1	Le produit scalaire de $H^{1/2}(\partial\Omega^s)$	58
3.1.1	Ecriture continue du produit scalaire	58
3.1.2	Propriétés	58
3.1.3	Approches existantes	59
3.2	Proposition de calcul approché	60
3.2.1	Formulation	60
3.2.2	Mise en œuvre numérique	62
3.3	Validation de l'approche proposée	63
3.3.1	Démarche	63
3.3.2	Calcul de référence	64
3.3.3	Résultats de la validation	68
3.4	Extension du calcul approché aux problèmes 3D	69
4	Validation de la méthode proposée	71
4.1	Mise en œuvre numérique de la méthode	72
4.1.1	Implémentation dans un code de calcul	72
4.1.2	Evaluation de la convergence	72
4.2	Interfaces parfaites	73
4.2.1	Optimisation des paramètres	74
4.2.2	Etude des convergences optimales	76
4.2.3	Extensibilité de la méthode	78
4.2.4	Vers une mise en œuvre tridimensionnelle	82
4.3	Interface de contact	83
4.3.1	Comparaison par rapport à la méthode de sous-discrétisation	83
4.3.2	Prise en compte d'hétérogénéités dans la structure	85
4.3.3	Essai Brinell : comparaison à la théorie de Hertz	87
4.4	Premières applications au calcul d'une jonction boulonnée	87
4.4.1	Principe de modélisation 2D	88
4.4.2	Résultats de la simulation	89
	Conclusion	91
	Bibliographie	93

A	Eléments d'analyse sur $H^{1/2}$ et le produit scalaire associé	103
A.1	Espaces de Sobolev fractionnaires $H^{1/2}(\partial\Omega)$ et $H^{-1/2}(\partial\Omega)$	103
A.1.1	Espaces d'ordre fractionnaire :	103
A.2	Normes et produits scalaires des espaces de Sobolev et les espaces fractionnaires	104
A.3	Calcul approché du produit scalaire de $H^{1/2}$ pour les problèmes 3D	105
A.3.1	Traitement des termes du produit scalaire de $L^2(\Omega)$	105
A.3.2	Traitement des termes singuliers	106
A.3.3	Bilan et approximation	108
B	Etudes paramétriques sur la gamma-shaped structure	109
B.1	Facteur d'échelle 0.25	109
B.2	Facteur d'échelle 0.5	111
B.3	Facteur d'échelle 2	113



Introduction

La conception de structures mécaniques complexes s'appuie de façon grandissante sur les simulations numériques. Elles sont utilisées pour la prédiction du comportement mécanique d'une pièce ou d'un assemblage, pour l'évaluation de la durée de vie de composants ou encore pour le dimensionnement d'essais permettant de valider et certifier une conception. Dans un contexte de grande concurrence internationale, la simulation numérique du comportement joue un rôle primordial dans le domaine aéronautique, permettant de réduire les délais et les coûts de conception, d'évaluer la pertinence de nouvelles solutions technologiques avant de se lancer dans les investissements qu'elles imposent.

Les simulations numériques couvrent un large spectre d'application dont les objectifs varient le long du cycle de conception. Ainsi lors des phases de prédimensionnement, l'objectif principal est d'obtenir des bornes sur les quantités macroscopiques liées à la performance, comme une masse. Ce sont généralement des modèles simplifiés basés sur l'expérience qui sont mis en œuvre. Le manque de données d'entrée fiables et l'aspect global des quantités recherchées autorisent donc des temps de simulation faibles. Lors des phases de dimensionnement ou de certification, les données d'entrée à disposition sont plus nombreuses. Les données matériau sont définies et les interfaces de la pièce ou de l'assemblage étudié avec son entourage sont fixées. Il est attendu des simulations de comportement mécanique qu'elles soient d'une précision supérieure sur des quantités plus locales.

Ainsi le choix d'une méthode de simulation et des algorithmes de résolution associés varient en fonction de la phase de dimensionnement. Il tient compte des évolutions au cours de ces phases des données disponibles, de la précision recherchée et des temps de calcul acceptables. Les travaux présentés dans ce document visent les phases de développement, venant après le pré-dimensionnement, et les phases de certification. Lors des phases de développement, on cherche à évaluer les performances obtenues par des boucles courtes de dessin-simulation-évaluation de critères qui imposent un temps de calcul réduit. En terme de précision recherchée, l'objectif est double :

- Pouvoir valider une conception selon les critères fonctionnels et de performance ;
- Faciliter le travail suivant de certification de cette conception.

Les méthodes employées à ces étapes de la conception reposent sur de la modélisation en

trois dimensions et contiennent généralement un voire plusieurs types de non-linéarités : comportement non linéaire du matériau, interface de type contact avec frottement, etc.. Elles présentent généralement des compromis précision/temps de calcul adaptables à la phase dans laquelle elles sont employées. Typiquement, une modélisation 3D par la méthode des éléments finis aura un maillage plus fin lors de simulations visant la certification que lors des boucles courtes de tests de solutions techniques.

C'est dans le but d'améliorer ce compromis, pilier du choix d'une méthode de simulation, que se sont développées au cours des 20 dernières années plusieurs approches pour les calculs mécaniques non-linéaires.

Sans prétention à l'exhaustivité et en plaçant dans le cadre restreint des éléments finis, on peut distinguer :

- Méthodes de décomposition de domaine : partition du problème en sous-ensemble afin de tirer profit des nouvelles architectures matérielles en informatique [Gosselet et Rey, 2006; Toselli et Widlund, 2005; Maday et Rønquist, 2008] ;
- Méthodes de réduction de modèles : résolution du problème par la recherche d'une solution sous une forme particulière ne conservant que les informations jugées nécessaires [Nouy, 2010; Ryckelynck et Missoum B., 2010] ;
- Méthodes d'enrichissement local de la modélisation : résolution d'un problème grossier enrichi localement soit par superposition ou remplacement de solutions de problèmes plus fins [Tranquart, 2012; Touzeau *et al.*, 2011; Gendre, 2009] soit par ajout de fonctions de forme dans les éléments finis [Moës *et al.*, 1999] ;
- Diverses méthodes numériques avancées : remaillage adaptatif fonction d'un critère d'erreur, couplage de modèles adapté au comportement local de la structure étudiée [Marchais *et al.*, 2014; Wyart *et al.*, 2008], etc.

Le travail présenté dans les pages qui suivent porte sur une méthode de type décomposition de domaine. Ces méthodes ont pour origine les travaux mathématiques de Schwarz [Schwarz, 1870] et connaissent un essor dans le cadre de leurs applications aux problèmes de mécanique depuis l'apparition des nouvelles architectures informatiques distribuées. En effet, l'augmentation des capacités de calcul des ordinateurs par accumulation de processeurs s'est démocratisée pendant la dernière décennie, au point d'atteindre les ordinateurs personnels grand public. Les améliorations des performances des méthodes de simulation passant nécessairement par leur adaptation aux matériels sur lesquels elles vont être mises en œuvre, le principe de découper la structure étudiée en sous-problèmes traités chacun par un processeur est une approche naturelle. On peut distinguer deux catégories dans les méthodes de décomposition de domaine :

- Décomposition en sous-domaines après avoir discrétisé le problème à résoudre ;
- Décomposition en sous-domaines avant la discrétisation.

Le premier cas est le plus répandu dans les applications de la décomposition de domaine à la mécanique. La décomposition n'apparaît qu'une fois que le problème a été exprimé sous la forme matricielle classique :

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

La méthode est alors plus un moyen de résolution efficace du problème qu'un cadre de modélisation. Les approches sont multiples, les plus classiques se basent sur une résolution par élimination des inconnues de type déplacement ou de type effort à l'interface des sous-domaines.

La deuxième possibilité consiste à décomposer le problème dès sa formulation continue. La discrétisation sur chaque sous-domaine peut alors se faire de façon indépendante et peut

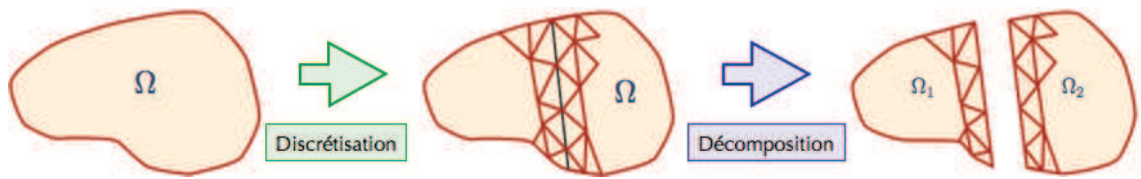


FIGURE 1 – Traitement du problème par discrétisation puis décomposition en sous-domaines.

conduire, contrairement au cas précédent, à des incompatibilités.

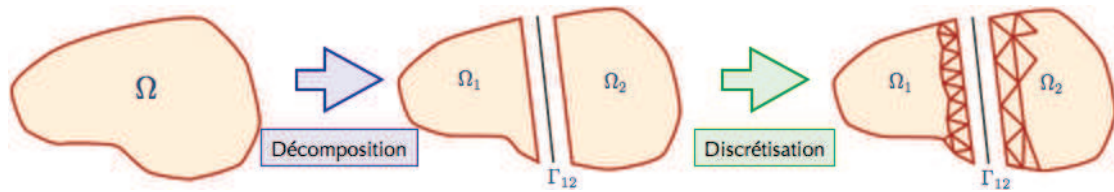


FIGURE 2 – Traitement inverse, la décomposition en sous-domaines précède la discrétisation.

Ces méthodes présentent l'avantage de permettre une formulation au niveau continu des liens aux interfaces autorisant plus de liberté dans la modélisation.

La méthode développée dans le cadre de cette thèse fait partie de la deuxième catégorie. Elle vise le traitement de simulations de grandes structures assemblées. Ces structures sont constituées de larges panneaux, métalliques ou en matériaux composites, assemblés par diverses solutions technologiques comme le collage, le rivetage ou le boulonnage. L'écriture au niveau continu des équations d'interfaces permet de traiter à la fois les comportements de colle, éventuellement endommageable, et de contact frottant pour les interactions entre panneaux et rivets ou boulons. Afin de gagner en efficacité et en précision, la méthode se base sur une discrétisation originale des quantités d'effort à l'interface entre les sous-domaines. Par ailleurs, l'écart entre les longueurs caractéristiques des panneaux – le mètre voire la dizaine de mètres – et les technologies de jonction – le millimètre – impose une méthode adaptée au traitement de plusieurs échelles.

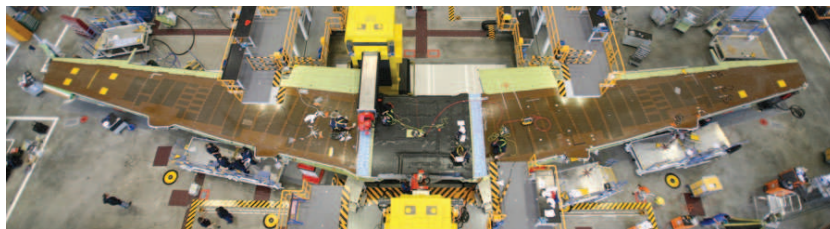


FIGURE 3 – Exemple de structures boulonnées : jonction entre le caisson central et les ailes de l'A400M (source : EADS).

Un élément de la méthode développée, le problème grossier, permet une mise en œuvre efficace d'une décomposition avec un grand nombre de sous-domaines ou avec des sous-domaines de tailles variées.

Le premier chapitre de ce document dresse un bilan sur la modélisation de structures mécaniques par les méthodes de décomposition de domaine. Après avoir posé le problème type qu'on se propose de résoudre, les méthodes permettant de traiter les interfaces parfaites et de type contact sont présentées dans leurs formulations continues et discrètes. Puis les variantes pour la modélisation d'interfaces à comportement plus complexes sont détaillées. Le deuxième chapitre présente la méthode développée, dans le cadre continu et dans le cadre discrétisé. Les différents ingrédients sont abordés, le traitement des interfaces de contact y est détaillé.

Le troisième chapitre a pour objet le calcul du produit scalaire de l'espace $H^{1/2}(\Gamma)$ nécessaire à la mise en œuvre de la méthode. Une méthode de calcul approchée est proposée et validée pour le traitement de maillages réguliers et irréguliers.

Enfin le quatrième chapitre démontre les performances de la méthode sur des cas tests académiques et sur un cas représentatif d'une structure industrielle. Dans un premier temps, les paramètres optimaux de la méthode sont déterminés afin de valider, dans un second temps, les apports de la méthode proposée.

Représentation des quantités d'interface dans les méthodes de décomposition de domaines

Contents

1.1 Problème type de mécanique traité dans cette étude	5
1.1.1 Problème type visé	6
1.1.2 Cadre formel pour les méthodes de décomposition de domaine . . .	8
1.2 Traitement des interfaces de conditions cinématiques	11
1.2.1 Interfaces de lien parfait	11
1.2.2 Interfaces de contact	24
1.3 Traitement continu et discrétisé des interfaces de comportement	26
1.3.1 Principe et utilisation de quantités d'interface spécifiques	26
1.3.2 Algorithme de résolution	27
1.3.3 Choix des champs de discrétisation	28
1.3.4 Problème grossier et quantités macro	31

Dans ce premier chapitre, le problème type visé par ces travaux est introduit. Un cadre formel pour la description des méthodes de décomposition de domaine est posé afin, dans un second temps, d'exposer ces méthodes en fonction de leurs capacités à traiter le problème type ou une partie de ce problème. Ainsi, les méthodes primales et leurs traitements des interfaces parfaites précèdent l'exposition des méthodes duales et de leurs variantes dont le formalisme est adapté au contact. Les méthodes mortar sont abordées pour le traitement des interfaces non-conformes et pour la liberté qu'elles offrent dans la définition d'espaces fonctionnels pour les quantités d'interface. Enfin, les méthodes mixtes et le traitement d'interface de comportements complexes sont détaillés dans la dernière partie.

1.1 Problème type de mécanique traité dans cette étude

Les travaux présentés dans ce document visent le dimensionnement de structures industrielles, éventuellement constituées de plusieurs pièces. Le problème de mécanique com-

prend la modélisation d'interfaces rencontrées dans le cadre de grandes structures assemblées comme :

- Les jonctions mécaniques entre pièces : collage, rivetage ou boulonnage. La modélisation de ces solutions technologiques passe par la représentation des interactions de contact éventuellement frottant.
- Matériaux composites : stratifiés ou tissés. Leur modélisation à l'échelle fine impose la mise en œuvre de comportement de type collage entre constituants voire des interfaces au comportement endommageant, pour représenter les mécanismes de ruine de ces matériaux (délaminage, etc.).

Les modèles de comportement choisis pour décrire l'évolution des constituants des structures étudiées sont éventuellement non-linéaires de sorte à prendre en compte, par exemple, la plasticité, les phénomènes visqueux ou l'endommagement.

1.1.1 Problème type visé

On se place dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations et on suppose que l'évolution thermique au sein de la structure est indépendante de son évolution mécanique.

Le problème type est représenté figure 1.1.

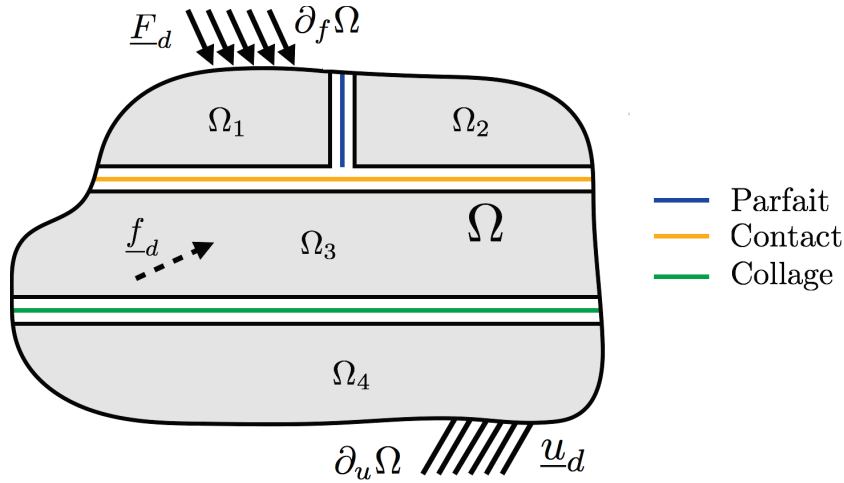


FIGURE 1.1 – Problème type étudié.

Il s'agit d'une structure composée de plusieurs constituants mécaniques $\Omega^s \subset \mathbb{R}^d$ où s correspond à la numérotation du constituant et d est la dimension spatiale du problème dans $\{1, 2, 3\}$. La structure est soumise, sur les bords $\partial\Omega^s \cap \partial\Omega$ de ses constituants à deux type de conditions :

- Condition de Dirichlet : un déplacement \underline{u}_d est imposé sur des parties $\partial_u\Omega^s$ de $\partial\Omega^s$;
- Condition de Neumann : un effort \underline{F}_d est imposé sur $\partial_f\Omega^s$, partie de $\partial\Omega^s$ complémentaire de $\partial_u\Omega^s$;

On considère également la présence éventuelle d'une sollicitation par un effort volumique \underline{f}_d imposé sur Ω .

Dans la modélisation des interfaces entre constituants de la structure, deux types d'interactions sont à différencier : les interfaces de contraintes cinématiques et les interfaces de comportement. Elles sont détaillées dans les paragraphes suivants.

Interfaces à conditions cinématiques : Cette catégorie regroupe les interfaces dont le comportement est piloté par une condition sur le saut de déplacement entre les deux constituants en vis-à-vis. Les efforts à l'interface sont alors définis comme étant les quantités duales de ces déplacements permettant d'imposer la condition à vérifier, et ne peuvent être obtenus indépendamment de l'équilibre des sous-structures. Typiquement, les interfaces de collage parfait, apparaissant le plus souvent lors de la décomposition d'une même pièce en plusieurs sous-structures, et les interfaces de contact, sont toutes deux des interfaces à conditions cinématiques.

Interfaces à comportement : Le lien entre des constituants partageant une interface à comportement est défini par une relation, éventuellement non-linéaire, entre le saut de déplacement en chaque point de cette interface et les efforts en résultant. Leurs expression et mise en œuvre passent classiquement par l'introduction de quantités mécaniques propres à l'interface. Les interfaces à comportement élastique, plastique ou à comportement endommageant font partie de cette catégorie.

La structure type étudiée ici est composée de quatre constituants reliés par trois interfaces : un collage parfait, un contact et une interface à comportement. La modélisation n'impose *a priori* aucune restriction sur le comportement des constituants.

Dans le cadre des hypothèses posées, le problème de mécanique est décrit par l'évolution des différents constituants de la structures et des interfaces :

- Sur chaque constituant, l'équilibre mécanique et la relation décrivant le comportement du matériau sont complétés par les conditions aux limites :

$$\left| \begin{array}{ll} \underline{div}(\underline{\sigma}) + \underline{f}_d &= \underline{0} & \text{dans } \Omega^s \\ \underline{\sigma} &= \mathcal{K} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}) & \text{dans } \Omega^s \\ \underline{\varepsilon}(\underline{u}) &= \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{\nabla} \underline{u}^T) & \text{dans } \Omega^s \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{n} &= \underline{F}_d & \text{sur } \partial_f \Omega^s \\ \underline{u} &= \underline{u}_d & \text{sur } \partial_u \Omega^s \end{array} \right. \quad (1.1.1)$$

Afin que le problème soit bien posé, on suppose que $\overline{mes} \left(\bigcup_s \partial_u \Omega^s \right) > 0$ et que le tenseur \mathcal{K} définit une forme bilinéaire symétrique définie positive sur l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2. En effet, afin de se focaliser sur les difficultés liées aux interfaces, le comportement des sous-domaines est choisi linéaire élastique.

- Pour les interfaces, les déplacements \underline{u}_b doivent correspondre à la restriction aux bords des déplacements internes des constituants adjacents \underline{u} . Une relation supplémentaire impose des conditions sur le saut de déplacement (noté avec l'opérateur $[[\cdot]]$) et l'équilibre des efforts engendrés. Dans le cas d'une interface parfaite, le saut de déplacement est nul et les efforts doivent être équilibrés :

$$\left| \begin{array}{ll} \underline{u}_b^s &= Tr(\underline{u}^s) & \text{sur les interfaces internes} \\ [[\underline{u}_b]] &= 0 & \text{sur les interfaces internes} \\ \sum \underline{\sigma} \cdot \underline{n} &= 0 & \text{sur les interfaces internes} \end{array} \right. \quad (1.1.2)$$

Dans le cas d'un contact, elle comprend la condition de non-interpénétration des deux constituants. Pour un comportement de type élastique, plastique, avec ou sans endommagement, le lien évolue en fonction de l'amplitude du saut de déplacement :

les efforts engendrés sont équilibrés en fonction de l'amplitude du saut à la manière d'une relation de comportement classique écrite entre déformations et contraintes :

$$\left| \begin{array}{ll} \underline{u}_b^s = Tr(\underline{u}^s) & \text{sur les interfaces internes} \\ \underline{\underline{\sigma}}^s \cdot \underline{n}^s = b^s(\llbracket \underline{u}_b \rrbracket) & \text{sur les interfaces internes} \end{array} \right. \quad (1.1.3)$$

Pour la résolution du problème qui vient d'être présenté, on privilégiera dans la suite l'utilisation de la méthode des éléments finis [Zienkiewicz et Taylor, 1989; Bonnet et Frangi, 2006] qui est largement utilisée pour le dimensionnement de structures industrielles. Le traitement des assemblages de pièces, ou plus généralement de structures décomposées, par cette méthode introduit une possibilité de non-conformité des discrétisations entre les composants de la structures. Dans les travaux présentés dans la suite de ce document, on ne présuppose d'aucun type de discrétisation particulière.

Classiquement, la résolution de ce problème type à plusieurs constituants mécaniques se fait par une approche monolithique. Après discrétisation par éléments finis, les conditions d'interfaces sont intégrées au problème global par substitution afin de n'avoir qu'un seul système d'équations à résoudre.

On s'intéresse ici à la résolution par une méthode de décomposition de domaine, alternative pertinente à l'approche monolithique dans les cas où :

- Au niveau continu des équations, les constituants ne sont pas décrits par les mêmes modèles physiques ;
- Au niveau des équations discrétisées, la résolution des équations n'est pas traitée par la même méthode sur chaque constituant ;
- Au niveau de la résolution du problème discret, il est avantageux de traiter plusieurs sous-problèmes de façon itérative par rapport au problème global d'un seul bloc.

Dans la suite du chapitre, plusieurs méthodes de décomposition de domaine visant à résoudre ce problème type sont présentées. Leur écriture nécessite l'introduction d'entités spécifiques à ces méthodes et de notations adaptées à l'écriture par sous-domaines. Ces aspects formels font l'objet des deux paragraphes qui suivent.

1.1.2 Cadre formel pour les méthodes de décomposition de domaine

1.1.2.1 Entités topologiques spécifiques

Dans les paragraphes qui suivent, les sous-domaines et leurs bords sont respectivement désignés par Ω^s et $\partial\Omega^s$. Les interfaces entre sous-domaines sont définies ainsi :

$$\gamma^{(i,j)} = \gamma^{(j,i)} = \partial\Omega^i \cap \partial\Omega^j \quad (1.1.4)$$

Le bord $\partial\Omega$ d'un sous-domaine est constitué de l'ensemble de ses interfaces avec les sous-domaines adjacents et des parties subissant des efforts ou des déplacements imposés :

$$\partial\Omega^s = \bigcup_i \gamma^{(s,i)} \cup \partial_u\Omega^s \cup \partial_f\Omega^s \quad (1.1.5)$$

On définit une interface interne au domaine décomposé comme l'union des interfaces entre sous-structures :

$$\Upsilon = \bigcup_{i \neq j} \gamma^{(i,j)} \quad (1.1.6)$$

Pour rappel, les constituants de la structures sont notés Ω^s . Le domaine complet de la structure est défini comme l'ensemble des sous-domaines qui la composent et de l'interface qui les lie :

$$\Omega = \bigcup_s \Omega^s \cup \Upsilon \quad (1.1.7)$$

1.1.2.2 Espaces fonctionnels pour les interfaces

Les quantités mécaniques jouant un rôle dans le problème à traiter évoluent dans des espaces fonctionnels définis sur les entités topologiques introduites au paragraphe précédent.

D'une manière générale dans les problèmes de mécanique, on privilégie les espaces d'évolution des quantités cinématiques. Les déplacements étant les seules quantités mesurables, on souhaite conserver leur continuité. Après avoir fixé la régularité des déplacements, on définit une forme d'énergie dont dérive un travail. C'est cette définition qui introduit les quantités duales des quantités cinématiques : les contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$, flux associé aux déformations par la relation de comportement. La composante normale du flux sur un bord définit les efforts d'interface qui seront notés $\underline{\underline{\lambda}}$.

$$\underline{\underline{\lambda}}^s = \underline{\underline{\sigma}}^s \cdot \underline{\underline{n}}^s \quad (1.1.8)$$

La résolution des équations régissant l'équilibre d'une structure se fait communément en les formulant de façon faible. On aboutit typiquement à la formulation suivante :

$$\forall \underline{\underline{v}}^* \in \mathcal{U}_{ad}, \quad \int_{\Omega} Tr[\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{v}}^*)] = \int_{\Omega} \underline{\underline{f}}_d \cdot \underline{\underline{v}}^* \, d\Omega + \int_{\partial_f \Omega} \underline{\underline{F}}_d \cdot \underline{\underline{v}}^* \, d\Gamma \quad (1.1.9)$$

où \mathcal{U}_{ad} est l'espace des déplacements cinématiquement admissibles défini par des conditions de régularité. Communément, les composantes des déplacements à l'intérieur des sous-structures seront recherchées dans $H^1(\Omega^s)$. Les déplacements sur le bord $\partial\Omega^s$ des sous-structures correspondent au prolongement par continuité du champ de déplacements interne à Ω^s . On introduit l'application Trace qui permet d'effectuer le passage des quantités du sous-domaine à son bord.

Définition : L'application Trace associe à une fonction évoluant à l'intérieur d'un domaine Ω^s son prolongement par continuité sur son bord $\partial\Omega^s$ [Dautray et Lions, 1987][Adams, 2003], – que l'on s'autorise parfois à noter comme une restriction – :

$$Tr^s : \begin{array}{ccc} H^1(\Omega^s) & \rightarrow & H^{1/2}(\partial\Omega^s) \\ \underline{\underline{u}}^s & \mapsto & \underline{\underline{u}}_b^s = Tr^s(\underline{\underline{u}}^s) = \underline{\underline{u}}_{|\partial\Omega^s}^s \end{array} \quad (1.1.10)$$

Les déplacements sur le bord d'un domaine, notés $\underline{\underline{u}}_b$, étant la trace d'une fonction de déplacements dans $H^1(\Omega^s)$, appartiennent à l'espace $H^{1/2}(\partial\Omega^s)$. Par dualité stricte au niveau des équations continues, les efforts d'interface correspondant à la composante normale du flux qui leur est associé doivent être dans $H^{-1/2}(\partial\Omega^s)$. Plus précisément, c'est la forme de travail associée aux efforts d'interface qui appartient à $H^{-1/2}(\partial\Omega^s)$, dual de $H^{1/2}(\partial\Omega^s)$. Sur le bord des sous-domaines, efforts et déplacements sont reliés par un opérateur.

Définition : L'opérateur de Steklov-Poincaré défini par sous-domaine permet de faire le lien entre les déplacements sur le bord de ce sous-domaine $\underline{\underline{u}}_b^s$ et les efforts dus à la réaction de la structure :

$$\mathcal{S}_p^s : \begin{array}{ccc} H^{1/2}(\partial\Omega^s) & \rightarrow & H^{-1/2}(\partial\Omega^s) \\ \underline{\underline{u}}_b^s & \mapsto & \mathcal{S}_p^s \underline{\underline{u}}_b^s = \underline{\underline{\lambda}}^s \end{array} \quad (1.1.11)$$

Où \underline{u}^s est le déplacement à l'interface et $\underline{\lambda}^s$ est la réaction associée.

Cet opérateur pseudo-différentiel linéaire elliptique est défini par la résolution d'un problème homogène avec des conditions aux limites de Dirichlet. En introduisant la dérivée conormale des déplacements sur le bord du domaine, le problème est réécrit sous forme variationnelle couplée. Sa résolution mène à la définition de l'opérateur et l'établissement de diverses propriétés comme l'ellipticité [Steinbach, 2003].

La formulation variationnelle du problème d'équilibre des sous-structures conduit à rechercher les composantes du tenseur des contraintes dans $L^2(\Omega^s)$.

1.1.2.3 Notations pour les systèmes par bloc

Les équations écrites pour chacun des sous-domaines ou par couple de sous-domaines permettent de reconstituer l'équilibre global lorsqu'elles sont écrites comme un ensemble. Après discrétisation, le vecteur inconnu des déplacements discrétisés \mathbf{u} s'écrit également comme la concaténation des vecteurs déplacement inconnus de chacun des sous-domaines :

$$\mathbf{u} = u^\Diamond = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^s \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \quad (1.1.12)$$

Une quantité dont l'exposant est un losange traversé d'une verticale désigne, dans la suite du document, une quantité constituée par blocs verticalement. De même, la concaténation de matrices sur une diagonale sera représentée par un losange traversé d'une diagonale :

$$\mathbf{K} = K^\Diamond = \begin{pmatrix} K^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & K^n \end{pmatrix} \quad (1.1.13)$$

Enfin, selon le même principe, une quantité dont l'exposant est un losange contenant une barre horizontale sera constituée de ces quantités pour chacun des sous-domaines concaténées par colonnes :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\Diamond = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^1 & \dots & \mathbf{A}^n \end{pmatrix} \quad (1.1.14)$$

1.1.2.4 Opérateurs d'assemblages

Afin de simplifier les passages de quantités internes aux sous-domaines à des quantités appartenant aux interfaces et vice-versa, on introduit deux opérateurs d'assemblages définis par sous-domaines. L'opérateur \mathbf{A}^s est strictement booléen, l'opérateur \mathbf{B}^s est une version signée de l'opérateur précédent. Ils permettent une écriture simplifiée des conditions d'assemblages entre quantités en vis-à-vis sur une interface. A titre d'illustration, on considère les équations d'une interface parfaite entre deux sous-domaines :

— Continuité des déplacements :

$$\mathbf{u}_b^1 - \mathbf{u}_b^2 = \mathbf{B}^1 \mathbf{u}_b^1 + \mathbf{B}^2 \mathbf{u}_b^2 = 0 \quad (1.1.15)$$

— Equilibre des réactions :

$$\boldsymbol{\lambda}^1 + \boldsymbol{\lambda}^2 = \mathbf{A}^1 \boldsymbol{\lambda}^1 + \mathbf{A}^2 \boldsymbol{\lambda}^2 = 0 \quad (1.1.16)$$

D'une manière générale et en utilisant les notations pour les systèmes par blocs introduites au paragraphe précédent, les équations de lien parfait s'écrivent :

— Continuité des déplacements :

$$\sum_s \mathbf{B}^s \mathbf{u}_b^s = \mathbf{B}^\diamond \mathbf{u}_b^\diamond = 0 \quad (1.1.17)$$

— Equilibre des réactions :

$$\sum_s \mathbf{A}^s \boldsymbol{\lambda}^s = \mathbf{A}^\diamond \boldsymbol{\lambda}^\diamond = 0 \quad (1.1.18)$$

La figure 1.2 présente un exemple de numérotation des nœuds et les opérateurs en résultant. Les opérateurs d'assemblages présentent des propriétés connues, en particulier, ils sont orthogonaux. En utilisant des vecteurs de réels \mathbf{x}, \mathbf{y} et \mathbf{z} de la taille du nombre de nœuds de l'interface à laquelle ils ont trait :

$$\text{Orthogonalité :} \quad \sum_s \mathbf{B}^s \mathbf{A}^{sT} = \mathbf{B}^\diamond \mathbf{A}^{\diamond T} = 0 \quad (1.1.19a)$$

$$\text{Décomposition unique :} \quad \forall \mathbf{x} \exists! (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \text{ tel que } \mathbf{x}^\diamond = \mathbf{B}^{\diamond T} \mathbf{y} + \mathbf{A}^{\diamond T} \mathbf{z} \quad (1.1.19b)$$

$$\text{Existence de quantités duales :} \quad \mathbf{A}^\diamond \mathbf{x} = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{B}^{\diamond T} \mathbf{y} \quad (1.1.19c)$$

$$\text{Jeu avec les transposées :} \quad \mathbf{X}^{\diamond T} = \mathbf{X}^{T\diamond} \quad \mathbf{X}^{\diamond T} = \mathbf{X}^{T\diamond} \quad (1.1.19d)$$

Le cadre formel étant posé, les paragraphes qui suivent abordent les possibilités de résolution du problème type amenées par différentes méthodes de décomposition de domaine. Les méthodes sont décrites en fonction du type d'interface qu'elles permettent de traiter.

1.2 Traitement des interfaces de conditions cinématiques

Les interfaces de conditions cinématiques sont des interfaces dont le comportement est piloté par une condition sur le saut de déplacement. Il s'agit des interfaces de comportement parfait, qui apparaissent quand on sépare virtuellement deux parties d'un même solide, et des interfaces de contact.

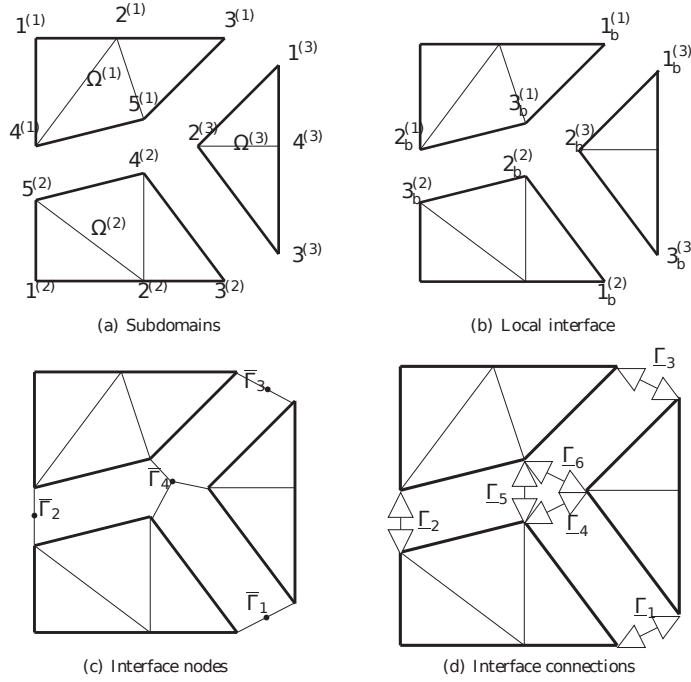
1.2.1 Interfaces de lien parfait

On considère dans un premier temps le traitement d'une version simplifiée du problème type ne comportant que des interfaces de lien parfait, représentée par la figure 1.3.

Le problème monolithique qu'on souhaite résoudre s'exprime par :

$$\left| \begin{array}{ll} \underline{\text{div}}(\underline{\sigma}) + \underline{f}_d &= \underline{0} & \text{dans } \Omega \\ \underline{\sigma} &= \mathcal{K} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}) & \text{dans } \Omega \\ \underline{\varepsilon}(\underline{u}) &= \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{\nabla} \underline{u}^T) & \text{dans } \Omega \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{n} &= \underline{F}_d & \text{sur } \partial_f \Omega \\ \underline{u} &= \underline{u}_d & \text{sur } \partial_u \Omega \end{array} \right. \quad (1.2.1)$$

Au niveau continu, le problème décomposé équivalent s'obtient par la combinaison des équations du comportement des sous-domaines complétées par les deux équations régissant



$$t^\diamond = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^\diamond = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^\diamond = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

FIGURE 1.2 – Exemple de numérotations locales et d'interface, opérateur trace et opérateurs d'assemblage associés [Gosselet et Rey, 2006].

le comportement aux interfaces internes :

$$\left| \begin{array}{ll} \underline{div}(\underline{\sigma}) + \underline{f}_d &= \underline{0} & \text{dans } \Omega^s \\ \underline{\sigma} &= \mathcal{K} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}) & \text{dans } \Omega^s \\ \underline{\varepsilon}(\underline{u}) &= \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{\nabla} \underline{u}^T) & \text{dans } \Omega^s \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{n} &= \underline{F}_d & \text{sur } \partial_f \Omega^s \\ \underline{u} &= \underline{u}_d & \text{sur } \partial_u \Omega^s \end{array} \right. \quad (1.2.2a)$$

$$\underline{u}_b^i - \underline{u}_b^j = 0 \quad \text{sur } \gamma^{(i,j)} \quad (1.2.2b)$$

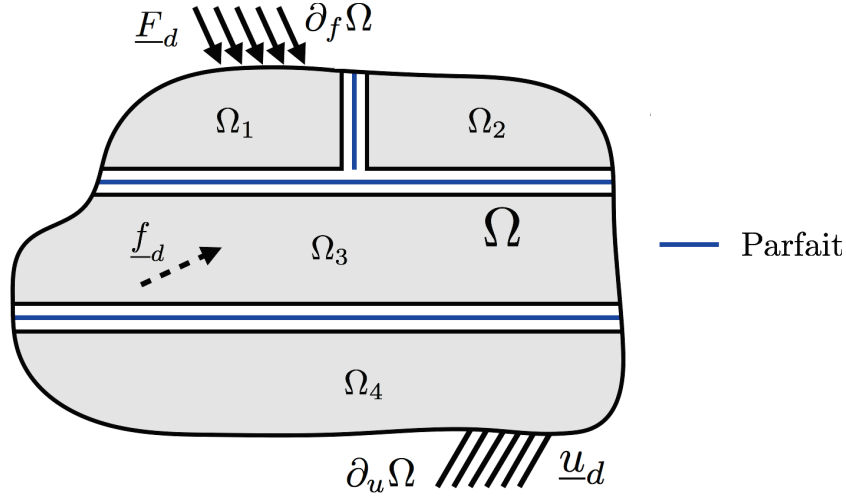


FIGURE 1.3 – Version simplifiée du problème ne contenant que des interfaces parfaites.

$$\underline{\lambda}^i + \underline{\lambda}^j = 0 \quad \text{sur } \gamma^{(i,j)} \quad (1.2.2c)$$

Au niveau discret, on fera l'hypothèse d'une décomposition conforme avec la discrétisation éléments finis. Chaque élément appartient à une seule sous-structure et il y a, de part et d'autre de l'interface, correspondance des nœuds, égalité des espaces d'approximation et des types de modèles (barre, poutre, etc.). Cette hypothèse correspond à la majorité des cas dans lesquels les interfaces entre sous-domaines sont à comportement parfait. En effet, plus qu'au niveau continu, la décomposition menant à des interfaces internes parfaites a généralement lieu au niveau discret. Ce cas de figure correspond, la plupart du temps, à l'étude d'une seule pièce mécanique pour laquelle on souhaite profiter des capacités de résolution d'une architecture informatique à plusieurs processeurs.

Ainsi le problème (1.2.1) s'écrivant après discrétisation :

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1.2.3)$$

est équivalent, dans le cadre de la décomposition envisagée, au système matriciel décomposé suivant [Gosselet et Rey, 2006; Toselli et Widlund, 2005] :

$$\text{Equilibre des sous-structures :} \quad \mathbf{K}^s \mathbf{u}^s = \mathbf{f}^s + \mathbf{t}^{s^T} \boldsymbol{\lambda}^s \quad (1.2.4a)$$

$$\text{Continuité des déplacements à l'interface :} \quad \mathbf{B}^\diamond \mathbf{u}_b^\diamond = 0 \quad (1.2.4b)$$

$$\text{Equilibre à interface :} \quad \mathbf{A}^\diamond \boldsymbol{\lambda}^\diamond = 0 \quad (1.2.4c)$$

Dans les paragraphes qui suivent, le traitement de ce problème type par les méthodes de décomposition de domaine classique est abordé. L'analyse s'engage avec l'écriture du problème discret pour l'approche primale.

1.2.1.1 Formulation discrétisée de l'approche primale

On introduit une discrétisation du domaine étudié par la méthode des éléments finis. Cependant, les raisonnements qui suivent sont valables pour tout type de discrétisation par la méthode de Galerkin [Gosselet et Rey, 2006].

La décomposition du domaine discrétisé est telle qu'aucun élément n'est coupé par la frontière entre deux sous-domaines. Autrement dit, un sous-domaine est constitué d'une union d'éléments finis. A l'interface entre deux sous-domaines, les nœuds de la discrétisation sont ainsi coïncidents. Dans une telle configuration, le problème (1.2.3) peut être réécrit sur chaque sous-domaine en séparant les inconnues de déplacement en deux groupes :

- les degrés de liberté internes au sous-domaine notés \mathbf{u}_i^s
- les degrés de liberté liés à l'interface entre les sous-domaines notés \mathbf{u}_b^s .

Le système (1.2.2) s'écrit ainsi :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ii}^s & \mathbf{K}_{ib}^s \\ \mathbf{K}_{bi}^s & \mathbf{K}_{bb}^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_i^s \\ \mathbf{u}_b^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_i^s \\ \mathbf{f}_b^s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\lambda}^s \end{pmatrix} \quad (1.2.5)$$

La première ligne du système permet d'exprimer les déplacements internes :

$$\mathbf{u}_i^s = \mathbf{K}_{ii}^{s-1} (\mathbf{f}_i^s - \mathbf{K}_{ib}^s \mathbf{u}_b^s) \quad (1.2.6)$$

grâce auxquels, par élimination, on obtient le système condensé à l'interface :

$$(\mathbf{K}_{bb}^s - \mathbf{K}_{bi}^s \mathbf{K}_{ii}^{s-1} \mathbf{K}_{ib}^s) \mathbf{u}_b^s = (\mathbf{f}_b^s - \mathbf{K}_{bi}^s \mathbf{K}_{ii}^{s-1} \mathbf{f}_i^s) \quad (1.2.7)$$

On définit alors le complément de Schur primal \mathbf{S}_p par :

$$\mathbf{S}_p^s = \mathbf{K}_{bb}^s - \mathbf{K}_{bi}^s \mathbf{K}_{ii}^{s-1} \mathbf{K}_{ib}^s \quad (1.2.8)$$

et on introduit le second membre condensé :

$$\mathbf{b}_p^s = \mathbf{f}_b^s - \mathbf{K}_{bi}^s \mathbf{K}_{ii}^{s-1} \mathbf{f}_i^s \quad (1.2.9)$$

Pour chaque sous-domaine, l'équilibre s'écrit alors sous forme discrète condensée :

$$\mathbf{S}_p^s \mathbf{u}_b^s = \mathbf{b}_p^s + \boldsymbol{\lambda}^s \quad (1.2.10)$$

Le complément de Schur primal est une approximation discrète de l'opérateur de Steklov-Poincaré. Il fait le lien entre déplacements et efforts de réaction au niveau des quantités nodales.

La continuité des déplacements (1.2.4b) est assurée en introduisant une unique inconnue de déplacement à l'interface $\mathbf{u}_b^\Phi = \mathbf{A}^{\diamond T} \overline{\mathbf{u}}_b$. En assemblant les systèmes (1.2.1.1), on élimine l'inconnue $\boldsymbol{\lambda}^s$ et on obtient la formulation condensée du problème (1.2.2) :

$$\mathbf{A}^{\diamond} \mathbf{S}_p^{\diamond} \mathbf{A}^{\diamond T} \overline{\mathbf{u}}_b = \mathbf{A}^{\diamond} \mathbf{b}_p^{\diamond} \quad (1.2.11)$$

La résolution de ce système permet d'obtenir les déplacements sur les interfaces \mathbf{u}_b^s , puis d'en déduire les déplacements internes \mathbf{u}_i^s grâce à l'équation (1.2.6). L'inversion de \mathbf{K}_{ii}^s correspondant à la résolution d'un problème de Dirichlet bien posé sur le sous-domaine, l'obtention de \mathbf{u}_i^s par cette équation est valable.

1.2.1.2 A propos des efforts d'interface

L'approche primale privilégiant la continuité des déplacements, les efforts d'interface ne sont introduits que dans la formulation du problème. Concrètement, le système à résoudre obtenu par l'approche primale ne fait pas intervenir ces quantités, leur calcul n'étant pas nécessaire à la résolution du problème.

Pour le calcul de structure, cette situation est cohérente avec l'utilisation de ces méthodes principalement dans les cas d'étude d'une seule pièce. Elle est discrétisée, matrices de raideur et efforts sont assemblés, puis la résolution est menée en profitant de la parallélisation des calculs sur chaque sous-domaine. L'étude des charges au sein de la structure se faisant sur les contraintes, les efforts sur les interfaces virtuelles à l'intérieur de la pièce ne représentent pas un enjeu fondamental au dimensionnement d'une structure.

L'approche primale offre la possibilité, si nécessaire, de reconstituer des efforts d'interface par plusieurs approches, par exemple : utilisation d'une approximation de l'opérateur de dérivation normale du flux ou bien réinjection de la solution en déplacement dans une équation discrétisée d'équilibre aux interfaces obtenue en isolant les sous-domaines. Ces efforts d'interface sont calculés a posteriori.

Si les efforts ne sont pas au cœur des méthodes primales, ils apparaissent au premier rang dans la formulation des méthodes faisant l'objet des paragraphes suivants. Par continuité dans la présentation, le principe de ces méthodes privilégiant l'équilibre aux interfaces aura pour point de départ leur formulation discrète.

1.2.1.3 Formulation discrétisée de l'approche duale

L'approche duale consiste à vérifier a priori l'équilibre aux interfaces. Elle a été développée dans [Farhat et Roux, 2000] et est communément appelée méthode FETI pour « Finite Element Tearing and Interconnecting ». Initialement appelée « Dual Schur Complement Method », son développement a été motivé par la nécessité de traiter des problèmes de calculs de structures à grand nombre de degrés de liberté et mal conditionnés. La méthode consiste à minimiser la somme des énergies des sous-domaines sous la contrainte de saut nul à l'interface entre deux sous-domaines. Cette contrainte est imposée sous la forme d'un lagrangien dont le multiplicateur est communément désigné par λ . S'il est maintenant interprété comme la discrétisation d'une réaction à l'interface, il n'a pas été introduit dans le but d'obtenir les quantités duales au déplacement entre deux sous-domaines. L'idée était de contourner la difficulté présentée par le manque de consistance des problèmes de continuité à l'interface en les traitant de manière discrète. L'équivalence des formulations a été établie dans un premier lieu au niveau discrétisé : il y a équivalence entre le problème monolithique discrétisé et le problème sous-structuré obtenu par application de l'approche duale.

Pour obtenir la formulation duale du problème, on repart de (1.2.4a). La méthode consiste à vérifier a priori l'équilibre des réactions à l'interface en recherchant une unique inconnue $\bar{\lambda}$ sur l'interface Υ telle que $\lambda^\diamond = \mathbf{B}^{\diamond T} \bar{\lambda}$.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}^\diamond & -\mathbf{B}^{\diamond T} \\ -\mathbf{B}^\diamond & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^\diamond \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^s \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.12)$$

Exprimer \mathbf{u} avant de l'injecter dans (1.2.4b) revient à résoudre un problème de Neumann local sur chaque sous-domaine. En l'absence de conditions de Dirichlet suffisantes, ce problème est mal posé. C'est le cas en particulier pour les sous-structures dites flottantes,

n'ayant aucune partie de leur frontière coïncidente avec le bord de Ω . On utilise alors une pseudo-inverse de \mathbf{K}^s qui sera notée \mathbf{K}^{s+} et on introduit les déplacements \mathbf{u}_R^s correspondant aux modes rigides. Ils ne font pas travailler la sous-structure : $\mathbf{u}_R^s \in \ker(\mathbf{K}^s)$. En introduisant \mathbf{R}^s une base de $\ker(\mathbf{K}^s)$, on écrit $\mathbf{u}_R^s = \mathbf{R}^s \boldsymbol{\alpha}^s$ avec $\boldsymbol{\alpha}^s$ l'amplitude des déplacements de solide rigide. L'équation d'équilibre devient :

$$\mathbf{u}^s = \mathbf{K}^{s+} (\mathbf{f}^s + \mathbf{B}^{sT} \bar{\boldsymbol{\lambda}}) + \mathbf{R}^s \boldsymbol{\alpha}^s \quad (1.2.13)$$

Elle est complétée par la condition de non-excitation des déplacements de solides rigides par le chargement ou condition d'admissibilité du multiplicateur de Lagrange :

$$\mathbf{R}^{sT} (\mathbf{f}^s + \mathbf{B}^{sT} \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = 0 \quad (1.2.14)$$

Le système obtenu est alors :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^s = \mathbf{K}^{s+} (\mathbf{f}^s + \mathbf{B}^{sT} \bar{\boldsymbol{\lambda}}) + \mathbf{R}^s \boldsymbol{\alpha}^s \\ \sum_s \mathbf{B}^s \mathbf{u}^s = 0 \\ \mathbf{R}^{sT} (\mathbf{f}^s + \mathbf{B}^{sT} \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = 0 \end{cases} \quad (1.2.15)$$

Et l'élimination des déplacements donne :

$$\begin{cases} \mathbf{B}^s \mathbf{K}^{s+} \mathbf{f}^s + \mathbf{B}^s \mathbf{K}^{s+} \mathbf{B}^{sT} \bar{\boldsymbol{\lambda}} + \mathbf{B}^s \mathbf{R}^s \boldsymbol{\alpha}^s = 0 \\ \mathbf{R}^{sT} (\mathbf{f}^s + \mathbf{B}^{sT} \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = 0 \end{cases} \quad (1.2.16)$$

De même que pour les méthodes primales, il est possible de condenser le problème aux interfaces. Sous forme matricielle, on pose :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_d &= \mathbf{B}^\diamond \mathbf{K}^{+ \diamond} \mathbf{f}^\diamond & \text{et} & & \mathbf{S}_d &= \mathbf{B}^\diamond \mathbf{K}^{+ \diamond} \mathbf{B}^{T \diamond} \\ \mathbf{G} &= \mathbf{B}^\diamond \mathbf{R}^\diamond & \boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{\alpha}^\diamond & \mathbf{e} &= \mathbf{R}^{\diamond T} \mathbf{f}^\diamond \end{aligned}$$

Le système à résoudre s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S}_d & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{\lambda}} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{b}_d \\ -\mathbf{e} \end{pmatrix} \quad (1.2.17)$$

Dans cette méthode, les multiplicateurs de Lagrange sont porteurs d'une information nodale sur les efforts à l'interface. La reconstruction d'un intereffort peut se faire en recherchant une fonction sur l'interface dont le travail dans les déplacements est égal à celui obtenu au niveau discrétisé par les multiplicateurs.

1.2.1.4 Formulation continue de l'approche duale

Plusieurs formulations au niveau continu sont possibles. Par exemple, on pourra écrire l'approche duale sous la forme d'une minimisation d'énergie sous-contrainte :

$$E^s(\underline{u}_b^s) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^s} \underline{\varepsilon}(\underline{u}_b^s) : \mathcal{K} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}_b^s) - \int_{\Omega^s} \underline{f}_d^s \underline{u}_b^s - \int_{\partial_f \Omega^s} \underline{F}_d^s \underline{u}_b^s \quad (1.2.18)$$

pour laquelle on dualise la condition restrictive en introduisant un multiplicateur de Lagrange :

$$L(\underline{u}_b^1, \dots, \underline{u}_b^s, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_s E^s(\underline{u}_b^s) - \sum_s \langle \boldsymbol{\lambda}^s, [[\underline{u}_b]]^s \rangle \quad (1.2.19)$$

Cette formulation est issue d'une remontée depuis les équations discrétisées vers les équations continues. La problématique du choix de projection pour l'opérateur d'effort peut-être résolue par l'introduction d'un raccord faible. Avant d'aborder d'autres possibilités d'écriture du raccord, en particulier dans le cadre de la méthode FETI, les paragraphes suivants présentent brièvement les méthodes itératives utilisées pour la résolution des problèmes matriciels condensés obtenus par les approches primales et duales.

1.2.1.5 Méthodes de résolution classiques

Pour des raisons d'efficacité, pour des grands nombres de sous-domaines, la résolution des problèmes discrétisés obtenus par ces méthodes passe par l'utilisation de solveur itératifs. On citera en particulier les solveurs de Krylov décrits dans le détail dans [Saad, 2003]. Si la matrice de raideur du système non-décomposé est symétrique définie positive, alors l'opérateur discrétisé du complément de Schur l'est également (l'opérateur dual peut être semi-défini mais le second membre reste dans son image). Ainsi les algorithmes classiques de gradient conjugué peuvent être utilisés pour résoudre le problème globalement écrit sur l'interface. Dans le cas contraire, le solveur GMRes [Saad et Schultz, 1986] est un choix populaire pour sa robustesse.

1.2.1.6 Préconditionneurs et problèmes globaux pour ces approches

La résolution itérative par des solveurs de Krylov peut bénéficier d'un préconditionnement afin d'en améliorer les performances. Une matrice de pré-conditionnement, pour être efficace, vise à approcher l'inverse de la matrice itérative du problème sur l'interface. Cette dernière étant constituée d'un assemblage de contribution locale, l'approche la plus classique consiste à construire le preconditionneur par une somme pondérée des inverses des contributions locales.

$$\tilde{\mathcal{S}}_p^{-1} = \mathbf{W}_p \mathbf{A}^\diamond \mathcal{S}_d^\diamond \mathbf{A}^{T\diamond} \mathbf{W}_p^T \quad (1.2.20)$$

$$\tilde{\mathcal{S}}_d^{-1} = \mathbf{W}_d \mathbf{B}^\diamond \mathcal{S}_p^\diamond \mathbf{B}^{T\diamond} \mathbf{W}_d^T \quad (1.2.21)$$

Les matrices de pondérations \mathbf{W}_p et \mathbf{W}_d sont telles que $\mathbf{W}_p \mathbf{A}^\diamond = (\mathbf{W}_p^{\diamond T})^+$ et $\mathbf{W}_d \mathbf{B}^\diamond = (\mathbf{W}_d^{\diamond T})^+$. Elles permettent, en fonction de leurs constructions, de renouer le lien avec des considérations mécaniques, notamment les différences de rigidité au sein de structures hétérogènes. Le choix d'une approximation de l'inverse de la matrice du système relève d'un compromis entre sa précision - plus le preconditionneur est proche de l'inverse de la matrice, plus il est efficace - et son coût de calcul, qu'on souhaite minimal et aussi bien distribué en parallèle que possible.

Dans le cas de la méthode primale, les contributions locales sont obtenues par la résolution d'un problème de Neumann. À l'inverse, ce sont des problèmes de Dirichlet qui permettent d'assembler une matrice de préconditionnement pour les méthodes duales. Le premier est ainsi appelé preconditionneur de Neumann-Neumann, le second est le preconditionneur de Dirichlet.

Les problèmes locaux de Neumann peuvent s'avérer mal posés. Typiquement, lorsque les conditions aux limites ne sont pas suffisantes pour bloquer les mouvements de solide rigide de toutes les sous-structures, le problème de Neumann sur ces sous-structures flottantes est mal posé. La définition de conditions supplémentaires, dites conditions d'optimalité, évitant l'excitation des modes problématiques conduit généralement à la mise en place d'un

problème grossier. De taille réduite, il apparaît comme une condition de restriction ou de projection dans l'algorithme itératif, une augmentation dans le solveur de Krylov.

Lorsque la contrainte d'optimalité est associée à un préconditionnement de l'approche primale par une approximation de son inverse, la méthode obtenue est appelée "Balanced Domain Decomposition" (BDD) [Mandel, 1993]. Le même genre d'approche, avec différents problèmes grossiers, a été développée pour la méthode FETI [Farhat et Roux, 1994; Farhat et al., 1994, 2000, 2001].

1.2.1.7 Utilisation d'une dualité dans $H^{1/2}(\partial\Omega^s)$ sur les quantités d'interfaces

La méthode FETI a été développée à partir du problème de mécanique dans sa version discrétisée. Ce paragraphe concerne une méthode de type FETI présentée dans [Bernardi et al., 2008] développée au niveau continu.

L'idée introduite, basée sur les travaux de [Raviart et Thomas, 1977] et de [Grisvard, 1992], consiste à obtenir une identification de $H_0^1(\Omega)$ mieux adaptée à une application de FETI. Combinée à un calcul explicite du produit scalaire de $H^{1/2}(\partial\Omega)$, elle autorise une discrétisation traitant naturellement les points multiples et offrant des conditions de stabilité de la résolution et de convergence indépendantes du pas du maillage.

Afin d'en présenter les grandes lignes, on introduit N_s le nombre de sous-domaines, N_r le nombre d'interfaces composant la frontière de Ω^r ; et $\partial\Omega_0^r$, frontière de Ω^r commune avec la frontière de Ω . On introduit I tel que $\mathcal{S} = \bigcup_{r=1}^I \partial\Omega^r$ est le squelette de $\bar{\Omega}$, décomposition en sous-domaines sans recouvrement de Ω . $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S} \cap \Omega$ est celui de Ω . On définit ensuite la restriction de $H_0^1(\Omega)$ à chaque Ω^r :

$$H_b^1(\Omega^r) = \{ \underline{u}^r \in H^1(\Omega^r); \underline{u}^r = 0 \text{ sur } \partial\Omega^r \cap \partial\Omega \},$$

et l'espace de Hilbert X des déplacements sur Ω :

$$X = \left\{ \underline{u} \in L^2(\Omega); \underline{u}^r = \underline{u}|_{\Omega^r} \in H_b^1(\Omega^r), r \leq N_s, [\underline{u}]_{\gamma^{(i,j)}} \in H_{00}^{1/2}(\gamma^{(r,j)}) \forall j \neq r, \forall \partial\Omega^r \in \Upsilon \right\}$$

Où $[\underline{u}]_{\gamma^{(r,j)}} = \underline{u}^r - \underline{u}^j$. Le produit scalaire sur $H_b^1(\Omega_r)$ est donné par :

$$(\underline{u}^r, \underline{v}^r)_{1,\Omega^r} = (\underline{u}^r, \underline{v}^r)_{\Omega^r} + (\nabla \underline{u}^r, \nabla \underline{v}^r)_{\Omega^r} \quad (1.2.22)$$

Où $(\phi, \psi)_\Omega = \int_\Omega \phi(x)\psi(x) dx$ est le produit scalaire de $L^2(\Omega)$. De même, le produit scalaire sur X est donné par :

$$(\underline{u}, \underline{v})_X = \sum_{r=1}^{N_s} (\underline{u}^r, \underline{v}^r) + \sum_{i=I_0+1}^I ([\underline{u}]_{\Gamma_i}, [\underline{v}]_{\Gamma_i})_{1/2,00,\Gamma}, \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in X \quad (1.2.23)$$

Il en découle la norme suivante :

$$\|\underline{v}\|_X^2 = \sum_{r=1}^R \|\underline{v}^r\|_{1,\Omega^r}^2 + \sum_{i=I_0+1}^I \|[\underline{v}]_{\Gamma_i}\|_{1/2,00,\Gamma}^2 \quad \forall \underline{v} \in X \quad (1.2.24)$$

Le produit scalaire de $H_{00}^{1/2}(\Gamma^r)$, qui sera calculé explicitement par la méthode, est défini par :

$$(\underline{w}, \underline{v})_{1/2,00,\Gamma} = (\underline{w}, \underline{v})_{1/2,\Gamma} + \int_\Gamma \frac{\underline{w}(x)\underline{v}(x)}{d(x, \partial\Gamma)} dx, \quad \forall \underline{w}, \underline{v} \in H_{00}^{1/2}(\Gamma) \quad (1.2.25)$$

Avec :

$$(w, v)_{1/2, \Gamma} = \int_{\Gamma} w(x) v(x) \, dx + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{(w(x) - w(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^d} \, dx \, dy, \quad \forall v, w \in H^{1/2}(\Gamma) \quad (1.2.26)$$

La méthode consiste alors à identifier $H_0^1(\Omega)$, espace de solutions et des fonctions test de la formulation variationnelle du problème de mécanique,

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in X; b(\underline{\lambda}, v) = 0, \quad \forall \underline{\lambda} \in M\} \quad \text{où} \quad b(\underline{\lambda}, v) = \sum_{i=I_0+1}^I \langle \lambda_i, [v]_{\Gamma_i} \rangle_{-1/2, 00, \Gamma_i}, \quad (1.2.27)$$

et l'espace de multiplicateurs de Lagrange est défini par :

$$M = \left\{ \underline{\mu} \in \prod_{r=1}^{N_s} \prod_{j=1}^{N_r} H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{r,j}); \quad \mu_{r,j} = \mathbf{n}_{r,j} \cdot \underline{q}, \quad \text{pour certains } \underline{q} \in H(\text{div}, \Omega) \right\} \quad (1.2.28)$$

Avec $\mathbf{n}_{r,j}$, opérateur de trace normale sur la $j^{\text{ème}}$ facette du sous-domaine Ω_r et $H(\text{div}, \Omega) = \{ \underline{q} \in [L^2(\Omega)]^2, \text{div}(\underline{q}) \in L^2(\Omega) \}$.

Les multiplicateurs $\underline{\mu}$ sont des éléments de $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{r,j})$ et le problème à résoudre peut alors être reformulé comme suit :

$$\text{Trouver } (\underline{u}, \underline{\lambda}) \in X \times M \text{ tel que : } \left\{ \begin{array}{ll} a(\underline{u}, v) + b(\underline{u}, \underline{\lambda}) &= \sum_{r=1}^{N_s} (f, v_r)_{\Omega_r}, \quad \forall v \in X \\ b(\underline{u}, \underline{\mu}) &= 0, \quad \forall \underline{\mu} \in M \end{array} \right. \quad (1.2.29)$$

On peut démontrer que la condition de stabilité *inf-sup* suivante, assurant aussi une qualité de la solution, est vérifiée [Bernardi *et al.*, 2008] :

$$\sup_{\underline{\mu} \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(\underline{\mu}, v)}{\|\underline{\mu}\|_M \|v\|_X} = \alpha \quad \inf_{\underline{\mu} \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(\underline{\mu}, v)}{\|\underline{\mu}\|_M \|v\|_X} = \beta \quad (1.2.30)$$

Où α et β sont des constantes positives. Cette condition est également vérifiée dans le cas discrétisé, c'est-à-dire dans le cas où les espaces sur lesquels portent les *inf* et *sup* sont les espaces discrétisés : M_h et X_h .

Le problème de mécanique de départ peut, après les développements du paragraphe précédent, s'écrire comme suit :

$$\text{Trouver } (\underline{u}, \underline{\lambda}) \in X \times M \text{ tel que : } \left\{ \begin{array}{ll} R^{-1} \underline{u} + B^* \underline{\lambda} &= F \quad \text{sur } X^* \\ B \underline{u} &= 0 \quad \text{sur } M \end{array} \right. \quad (1.2.31)$$

Où R est l'isomorphisme de Riesz associé à la forme bilinéaire $a(., .) : R : X^* \mapsto X$, $\langle R^{-1} \underline{u}, v \rangle = a(\underline{u}, v)$, $\forall \underline{u}, v \in X$, et B est défini par : $B : X \mapsto M$, $B \underline{v} = ([v]_{\Gamma_i})_{i=I_0+1}^I$. $B \underline{v}$ donne donc le saut de v sur l'interface Γ_i , B^* est l'opérateur transposé de B et $b(., .)$ se traduit par :

$$b(\underline{\mu}, v) = \sum_{i=I_0+1}^I (\mu_i, [v]_{\Gamma_i})_{1/2, 00, \Gamma_i} = (\underline{\mu}, B \underline{v})_M \quad \forall v \in X \quad (1.2.32)$$

Enfin F est défini par : $F : X \mapsto \mathbb{R} \quad \langle F, v \rangle = \sum_{r=1}^2 (f, v^r)_{\Omega_r} = (f, v)_{\Omega}$.

Pour terminer, le déplacement est exprimé par :

$$\underline{u} = R(F - B^* \lambda) \quad i.e. \quad B\underline{u} = BRF - BRB^* \underline{\lambda}, \quad (1.2.33)$$

et la continuité aux interfaces $B\underline{u} = 0$ fournit le problème final à résoudre itérativement :

$$(BRB^*)\underline{\lambda} = BRF \text{ sur } M. \quad (1.2.34)$$

En introduisant le produit scalaire adéquat impliquant la modification de B , cette méthode permet d'arriver à une formulation du problème analogue à celle obtenue par FETI mais formulée au niveau continu. Les régularités impliquées sont à l'origine des propriétés de stabilité et d'indépendance de la convergence au pas du maillage démontrées dans [Bernardi *et al.*, 2008].

1.2.1.8 Utilisation d'un raccord faible générique

D'autres approches amènent naturellement la formulation d'un problème décomposé au niveau continu.

La méthode des éléments joints, ou méthode Mortar, [Bernardi *et al.*, 2005; Ben Belgacem *et Maday*, 1997], est une technique de décomposition de domaine qui permet d'exploiter la présence des sous-domaines pour choisir la discrétisation la plus appropriée au comportement local à modéliser. Elle s'inscrit dans le cadre où le problème (1.1.1) est tout d'abord écrit sous forme faible, puis la discrétisation des espaces fonctionnels et la décomposition du domaine Ω en sous-domaines se font en fonction des comportements locaux.

Basée sur la formulation faible d'un raccord entre les sous-domaines, elle permet notamment de traiter plusieurs types de non-conformités :

- Non-conformités fonctionnelles (au sens de Hodge) : lorsque les conditions de couplage des sous-domaines adjacents sont trop faibles pour assurer la conformité, dans le cas de discrétisations de types différents d'un sous-domaine à l'autre.
- Non-conformités géométriques : la géométrie des sous-domaines n'est pas sur-contrainte par la méthode dans le cas des discrétisations éléments finis. Une décomposition est dite géométriquement conforme si l'intersection de deux sous-domaines Ω^s est soit vide, soit un sommet, une arête, une face, ou une arête et une face [Bernardi *et al.*, 2005] ;
- Non-conformités de type recouvrement : les décompositions en sous-domaines se chevauchant et ayant des discrétisations différentes peuvent également être traitées par cette méthode.

La méthode des éléments joints repose principalement sur la définition et les propriétés des espaces fonctionnels les mieux adaptés pour le problème traité, non pas sur une meilleure représentation des opérateurs.

Le point de départ est la formulation variationnelle en déplacement traditionnelle dont la solution est un élément appartenant à $H_0^1(\Omega)$. Dans le même esprit que dans le paragraphe précédent, le but est de construire une famille discrète d'espaces de dimension finie approchant $H_0^1(\Omega)$. Pour les développements suivants, on se place dans le cas où la décomposition est sans recouvrement et géométriquement conforme. La méthode consiste à introduire deux partitions sans recouvrement du squelette \mathcal{S} de la structure décomposée. La première partition est constituée d'éléments joints :

$$\overline{\mathcal{S}} = \bigcup_{k=1}^{M^-} \overline{\gamma}_m^- \quad \text{avec} \quad \gamma_m^- \cap \gamma_{m'}^- = \emptyset, \quad 1 \leq m \leq m' \leq M^-$$

Où chaque γ_m^- est une arête, respectivement une face, si Ω est un domaine de \mathbb{R}^2 , respectivement de \mathbb{R}^3 , d'un sous-domaine que l'on renomme Ω_m^- . Cette décomposition n'est pas unique mais elle est conservée pour le reste de l'étude.

La seconde partition du squelette est en éléments non-joints :

$$\overline{\mathcal{S}} = \bigcup_{k=1}^{M^+} \overline{\gamma}_m^+ \quad \text{avec} \quad \gamma_m^+ \cap \gamma_{m'}^+ = \emptyset, \quad 1 \leq m \leq m' \leq M^+$$

Où chaque γ_m^+ est une arête ou une face d'un sous-domaine que l'on renomme Ω_m^+ .

Ces deux décompositions ont la propriété suivante :

- Soit γ_m^+ ne correspond à aucune $\gamma_m'^-$
- Soit $\gamma_m^+ = \gamma_m'^-$ et dans ce cas Ω_m^+ est différent de $\Omega_m'^-$.

Une fois la décomposition en sous-structures réalisée, on effectue une discrétisation. L'ordre de ces opérations peut être inversé, il s'agit ici d'un choix pour la présentation de la méthode. Soit δ_i le paramètre de discrétisation associé au $i^{\text{ème}}$ sous-domaine. Dans le cas des éléments finis, ce paramètre correspond au diamètre maximal des éléments de Ω_i (diamètre du plus grand cercle circonscrit par exemple). Pour chaque k , $1 \leq k \leq N_s$, on définit l'espace $X_{\delta k}$ par :

$$X_{\delta k} = \{ \underline{v}_h \in H^1(\Omega_k); \forall K \in \mathcal{T}_{kh}, v_h|_K \in \mathcal{P}_l(K) \}$$

Où :

- \mathcal{T}_{kh} est une triangulation de Ω_k ;
- K est un élément de \mathcal{T}_{kh} ;
- $\mathcal{P}_l(K)$ est la restriction à K de l'espace des polynômes de degré l ($l \geq 1$).

Typiquement, on pourra choisir un degré l_i différent pour chaque sous-domaine Ω_i . On suppose ici que $X_{\delta k}$ est inclus dans $H^1(\Omega_k)$ dans un souci de simplicité de l'explication, ce n'est pas le cas lorsqu'on utilise des éléments finis non-conformes sur les sous-domaines. On introduit alors les espaces suivants :

$$W_{\delta m}^+ = \{ \varphi_h \in H^1(\gamma_m^+); \forall K \in \mathcal{T}_{mh}^+, \varphi_h|_{K \cap \gamma_m^+} \in \mathcal{P}_l(K \cap \gamma_m^+) \}$$

$$\widetilde{W}_{\delta m}^+ = \{ \varphi_h \in W_{\delta m}^+; \forall K \in \widetilde{\mathcal{T}}_{mh}^+, \varphi_h|_{K \cap \gamma_m^+} \in \mathcal{P}_{l-1}(K \cap \gamma_m^+) \}$$

Où $\widetilde{\mathcal{T}}_{mh}^+$ représente l'ensemble des deux éléments qui contiennent les extrémités de γ_m^+ . L'espace $W_{\delta m}^+$ est l'espace des traces sur γ_m^+ des fonctions de $X_{\delta k}$.

On introduit alors l'opérateur joint Φ défini par :

$$\forall \underline{v} / \underline{v}|_{\Omega_k} \in H^1(\Omega_k), 1 \leq k \leq N_s, \quad \Phi(\underline{v})|_{\gamma_m^-} = Tr_m^- \left(\underline{v}|_{\Omega_m^-} \right), \quad 1 \leq m \leq M^- \quad (1.2.35)$$

Et on appelle \mathbb{X}_δ l'espace discret des éléments joints. C'est l'ensemble des fonctions v_d telles que :

- $\underline{v}_{\delta|\Omega_k} \in X_{\delta k}$;
- \underline{v}_d s'annulent sur $\partial\Omega$;
- on a pour chaque élément non-joint $\gamma_m^+, 1 \leq m \leq M^+$:

$$\forall \psi_d \in \widetilde{W}_{\delta m}^+, \int_{\gamma_m^+} \left(Tr_m^+ \left(\underline{v}_d|_{\Omega_m^+} \right) - \Phi(\underline{v}_d) \right) (\tau) \psi_d(\tau) \, d\tau = 0$$

L'objectif est de rendre l'erreur L_2 -orthogonale à $\widetilde{W}_{\delta m}^+$. Le problème décomposé et discrétisé peut alors s'écrire pour des inconnues et des quantités virtuelles appartenant à \mathbb{X}_δ .

La mise en œuvre numérique de la méthode peut se faire de deux façons différentes [Bernardi et al., 2005] :

- en construisant une base de l'espace \mathbb{X}_δ à partir des bases des $X_{\delta k}$;
- en introduisant des multiplicateurs de Lagrange pour assurer les conditions de couplages.

La première méthode ne donnant pas un accès a priori aux quantités de type effort et pour conserver un lien avec l'approche FETI, la suite de la présentation se concentre sur la méthode consistant à introduire des multiplicateurs de Lagrange.

On introduit les espaces :

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{W}}_\delta &= \prod_{m=1}^{M^+} \widetilde{W}_{\delta m}^+ \\ \widetilde{\mathbb{X}}_\delta &= \left\{ \underline{v}_\delta \text{ tel que } \underline{v}_{\delta|\Omega_k} \in X_{\delta k}, 1 \leq k \leq K \text{ et } \underline{v}_{\delta|\partial\Omega} = 0 \right\}\end{aligned}$$

On définit de plus la forme bilinéaire suivante :

$$c(\underline{v}_\delta, \underline{\psi}_\delta) = \sum_{m=1}^{M^+} \int_{\gamma_m^+} \left(Tr_m^+(\underline{v}_{\delta|\Omega_m^+}) - \Phi(\underline{v}_\delta) \right) (\mathcal{T}) \underline{\psi}_m(\mathcal{T}) \, d\mathcal{T}, \quad \underline{\psi}_\delta = (\psi_1, \dots, \psi_{M^+}) \quad (1.2.36)$$

On peut maintenant écrire le problème (1.1.1)

$$\text{Trouver } (\underline{u}_\delta, \underline{\lambda}_\delta) \in \widetilde{\mathbb{X}}_\delta \times \widetilde{\mathbb{W}}_\delta \text{ tel que : } \begin{cases} \sum_{k=1}^{N_s} a_k(\underline{u}_\delta, \underline{v}_\delta) + c(\underline{v}_\delta, \underline{\lambda}_\delta) = l(\underline{v}_\delta), & \forall \underline{v}_\delta \in \widetilde{\mathbb{X}}_\delta \\ c(\underline{u}_\delta, \underline{\psi}_\delta) = 0, & \forall \underline{\psi}_\delta \in \widetilde{\mathbb{W}}_\delta \end{cases} \quad (1.2.37)$$

Où : $a_k(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\Omega_k} \varepsilon(\underline{v}) : \mathcal{K} \varepsilon(\underline{u}) \, dx$. Ce problème peut s'écrire au niveau discrétisé sous la forme d'un système carré qu'on peut résoudre, par exemple, par un algorithme d'Uzawa :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \\ \tilde{\mathbf{\Lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Où les sous-matrices sont définies de la façon suivante :

- \mathbf{A} est la matrice de l'équation aux dérivées partielles discrétisée. Elle est diagonale par bloc, chacun des blocs correspondant à la discrétisation sur un sous-domaine.
- \mathbf{F} est le vecteur des efforts généralisés.
- \mathbf{C} est la matrice de discrétisation des conditions de liaisons.

A nouveau, ce problème est du même type que celui rencontré dans le cadre de la méthode FETI. De la même façon que pour l'approche du paragraphe précédent, la principale différence réside dans la définition de l'opérateur de conditions de liaison. Le cadre formel offert par la méthode des éléments joints permet notamment d'en définir un capable de traiter les non-conformités de maillage.

Traitement des non-conformités Le cas des interfaces non-conformes appliqué à l'élasticité est présenté dans [Hauret et Le Tallec, 2007]. Les modifications concernent particulièrement la définition des espaces d'approximation. Ainsi, on redéfinit :

$$X_{\delta k} = \left\{ \underline{v}_h \in H_*^1(\Omega_k) ; \forall K \in \mathcal{T}_{kh}, \underline{v}_h|_K \in \mathcal{P}_l(K) \right\} \oplus \mathcal{B}_{\delta k}$$

Avec $H_*^1(\Omega) = \left\{ \underline{v} \in H^1(\Omega), \underline{v}|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$ et où $\mathcal{B}_{\delta k}$ est un enrichissement possible sur les frontières des sous-domaines. Les fonctions supplémentaires permettent de gérer les points

de rencontres entre trois sous-domaines et plus mais aussi les interfaces courbes. L'espace complet d'approximation non-conforme X_δ est défini par le produit : $X_\delta = \prod_{k=1}^{N_s} X_{\delta k}$.

Le cas des interfaces non-conformes n'apparaît que lorsque la discrétisation des sous-domaines est choisie a priori. On suppose donc que chaque sous-domaine a déjà sa propre triangulation. On effectue alors la décomposition en éléments joints et non-joints comme précédemment. Les interfaces γ_m héritent du maillage surfacique imposé par le sous-domaine qualifié non-joint. Le maillage de l'interface est en fait la trace du maillage de ce sous-domaine. On impose également que l'hypothèse de conformité géométrique soit vérifiée.

Hypothèse de conformité géométrique : *Chaque élément de la discrétisation d'une interface est une face complète d'un élément du maillage du sous-domaine non-joint associé à cette interface.*

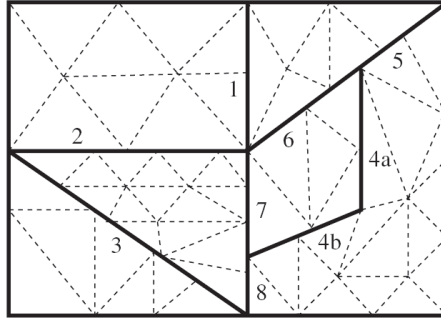


FIGURE 1.4 – Exemple de décomposition non-conforme. La vérification de l'hypothèse de conformité géométrique impose le choix des sous-domaines non-joints du côté de leur numérotation pour les interfaces 5 à 8. [Hauret et Ortiz, 2006]

La solution en déplacement est alors approchée sur l'espace contraint suivant :

$$V_\delta = \left\{ \underline{u}_\delta \in X_\delta, \int_{\gamma_m} [\underline{u}_\delta] \cdot \underline{\mu}_\delta = 0 \quad \forall \underline{\mu}_\delta \in M_{\delta m}, \quad 1 \leq m \leq M^+ \right\}$$

L'espace des multiplicateurs de Lagrange $M_{\delta m}$ est ensuite choisi selon plusieurs critères qui varient en fonction des études :

- coercivité de $\tilde{a}(\underline{u}, \underline{v}) = \sum_{k=1}^{N_s} a_k(\underline{u}_k, \underline{v}_k)$;
- vérification de la condition *inf-sup* (comportement uniforme et stabilité) ;
- prise en compte des mouvements de solides rigides.

Dans la formulation originale, $M_{\delta m} = \widetilde{W}_{\delta m}^+$ et $\mathcal{B}_{\delta k} = \emptyset$, $\forall 1 \leq k \leq N_s$. Mais ce choix présentant des difficultés dans l'implémentation de la méthode, on citera l'espace proposé dans [Hauret et Le Tallec, 2007] :

$$M_{\delta k} = \left\{ \underline{\mu} \in L^2(\gamma_m; \mathbb{R}^d); \quad \forall K \in \widetilde{\mathcal{T}}_{mh}^+, \quad \underline{\mu}|_F \in [\mathcal{P}_{l-1}(K \cap \gamma_m^+)]^d \right\}$$

Les multiplicateurs de Lagrange sont alors discontinus. Dans ce cas, une stabilisation sur les déplacements d'interfaces est requise : $\mathcal{B}_{\delta k} \neq \emptyset$, $\forall 1 \leq k \leq N_s$. L'enrichissement se fait par des “fonctions bulles” sur les interfaces. Le choix de l'espace de discrétisation des multiplicateurs de Lagrange est, dans cette méthode, tout aussi délicat que fondamental pour assurer une bonne qualité des résultats.

La décomposition d'une structure faisant apparaître des interfaces de type parfait ouvre un large éventail de méthodes permettant de résoudre le problème décomposé. Les approches peuvent être introduites après une discrétisation du problème de départ ou bien dès sa formulation continue. La liste des méthodes candidates est plus courte dans le cas où une des interfaces, au moins, est une interface de contact entre deux pièces.

1.2.2 Interfaces de contact

On s'intéresse au cas général de la présence d'une interface comme, par exemple, proposé figure 1.5.

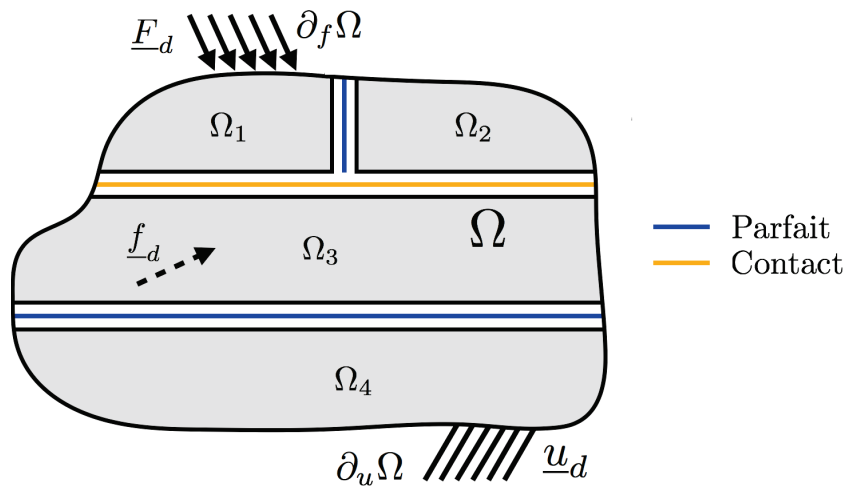


FIGURE 1.5 – Version simplifiée du problème contenant une interface de type contact.

1.2.2.1 Mise en équation à l'interface

Aux équations présentées au début du chapitre, (1.1.2) et (1.1.3), s'ajoute le comportement d'un contact :

$$\begin{aligned}
 (\underline{u}_b^r - \underline{u}_b^s) \cdot \underline{n}^i + g &\geq 0 && \text{Condition de non-pénétration} \\
 \underline{\lambda}^i \cdot \underline{n}^i = \underline{\lambda}_n^i &\geq 0 && \text{Effort normaux uniquement en compression} \\
 (\underline{u}_{bn}^r - \underline{u}_{bn}^s + g) \cdot \underline{\lambda}_n^i &= 0 && \text{Condition de complémentarité} \\
 \underline{\lambda}^r + \underline{\lambda}^s &= 0 && \text{Equilibre des efforts}
 \end{aligned}$$

Avec \underline{n} , la normale à l'interface, g un représentant du jeu entre les deux pièces en contact, $i \in \{r, s\}$ et la notation $\underline{v} \geq 0$ désignant que toutes les composantes du vecteurs \underline{v} sont positives où nulles.

La formulation de ce comportement d'interface fait nécessairement intervenir deux déplacements disjoints et un représentant des efforts d'interface. Ainsi, les méthodes primales de décomposition de domaine ne fournissent pas le cadre nécessaire à la résolution de l'équilibre d'interface.

1.2.2.2 Approches autour du cadre FETI

Le traitement dans le cadre des méthodes duales a été abordé autour de FETI dans [Dureis-seix et Farhat, 2001]. Les multiplicateurs de Lagrange imposant la condition de continuité sont utilisés pour résoudre le problème de contact.

L'approche présentée dans [Dostál et al., 2005, 2010; Dobiáš et al., 2010] est basée sur une variante de la méthode FETI appelée TFETI pour Total-FETI. Elle consiste à considérer tous les sous-domaines comme flottants, en forçant ceux dont la frontière ou une partie ont des conditions aux limites de Dirichlet à être en lien avec l'extérieur comme s'il s'agissait d'un autre sous-domaine. L'avantage principal réside dans la simplification de la définition du problème grossier en utilisant l'espace des mouvements de solides rigides applicable, dès lors, à tous les sous-domaines.

Le système à résoudre est alors ramené à un problème d'optimisation sous contrainte formulé avec des conditions de Karush-Kuhn-Tucker :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{u} &= \mathbf{f} - \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\lambda}_c &\geq 0 \\ \boldsymbol{\lambda}_c^T (\mathbf{B}_c \mathbf{u}_c - \mathbf{g}_c) &= 0 \\ \mathbf{B}_p \mathbf{u}_p &= 0 \end{aligned} \tag{1.2.38}$$

Où la séparation est faite entre les inconnues des interfaces de type parfait marquées par \square_p et celles des interfaces de contact marquées par \square_c :

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_c^T; \mathbf{B}_p^T]^T \quad \boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\lambda}_c^T; \boldsymbol{\lambda}_p^T]^T \tag{1.2.39}$$

A nouveau, la matrice d'assemblage \mathbf{B} est clé dans la formulation de ce problème particulier. La sous-matrice correspondant aux inconnues de contact \mathbf{B}_c est souvent obtenue par une description nodale des conditions. Mais elle peut également découler d'une description Mortar, au sens de formulation faible du lien, de l'interface de contact.

1.2.2.3 Approche de type mortar

Le cadre offert par la méthode des éléments joints a été exploité pour formuler de manière faible le problème de contact. Sans rentrer dans le détail, on notera qu'un choix particulier d'espace pour les multiplicateurs de Lagrange [Wohlmuth, 2000; Lamichhane et al., 2005] permet de traiter les interfaces de contact dans le cadre de méthodes multi-grilles [Wohlmuth, 2001].

Dans les méthodes présentées jusqu'à présent, la décomposition du problème est abordée d'un point de vue mathématique. Il s'agit de poser le problème de mécanique puis, hormis pour les éléments joints, de trouver après discrétisation les outils de mathématique et d'algorithmie permettant de le résoudre efficacement. On remarque tout de même que l'utilisation de techniques pour l'accélération ou la scalabilité des méthodes renoue le lien avec les aspects physiques du problème : les préconditionneurs et autres problèmes globaux sont intimement liés au comportement mécanique de la structure étudiée. Les méthodes détaillées dans la section suivante abordent la mise en œuvre d'un problème décomposé en considérant dès le départ la physique simulée. La décomposition du problème étudié tient compte de la structure et de son comportement. Cette analyse et les choix qui en découlent sont menés avant la discrétisation du problème pour sa résolution numérique.

1.3 Traitement continu et discrétisé des interfaces de comportement

Le traitement des interfaces de comportement requiert un cadre formel plus souple que celui des méthodes présentées dans les sections précédentes, notamment parce que le problème est difficilement condensable. Afin de résoudre le problème type rappelé figure 1.6, un accès aux quantités de déplacement et d'effort au niveau de l'interface est nécessaire dès le niveau continu. Le collage de l'interface du problème type englobe une catégorie vaste de liens

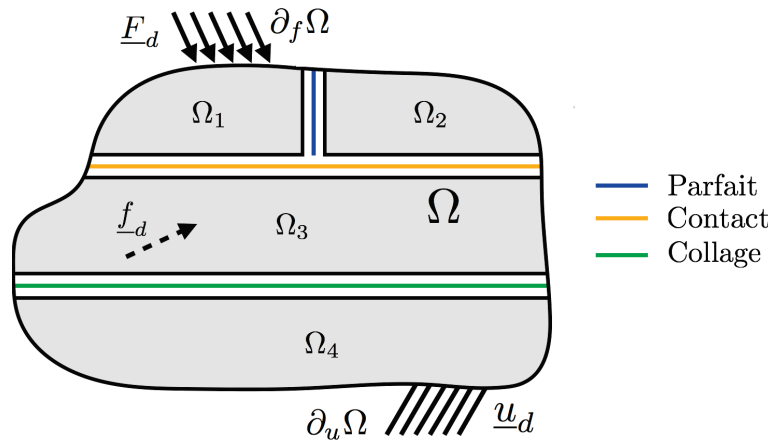


FIGURE 1.6 – Problème type étudié.

entre sous-domaines : lien élastique, lien parfait endommageable, interface cohésive, etc. Chacun impose un traitement bien particulier des équations régissant ce comportement. Les paragraphes qui suivent présentent une méthode de décomposition de domaine basée sur une méthode de Schwarz [Lions, 1988, 1989] sans recouvrement [Lions, 1990].

1.3.1 Principe et utilisation de quantités d'interface spécifiques

La méthode LaTIn, pour Large Time Increment, présentée dans [Ladevèze et Dureisseix, 1999] consiste à modéliser le domaine Ω comme un assemblage de constituants simples : les sous-structures et les interfaces. Chacun d'entre eux possède ses propres variables et ses propres équations. La frontière $\partial\Omega_E$ d'une sous-structure $\Omega_{E \in \mathbf{E}}$ est soumise à la distribution d'efforts \underline{F}_E et de déplacements \underline{W}_E . L'interface $\Gamma_{EE'}$ génère le lien entre les composantes respectives des couples $(\underline{W}_E, \underline{F}_E)$ et $(\underline{W}_{E'}, \underline{F}_{E'})$.

La solution $s = \{s_E, E \in \mathbf{E}\}$ où $s_E = (\underline{U}_E, \underline{W}_E, \underline{\sigma}_E, \underline{F}_E)$ doit alors vérifier les deux groupes d'équations suivants :

- Le groupe d'équations \mathbf{A}_d qui traduit l'admissibilité du comportement des sous-

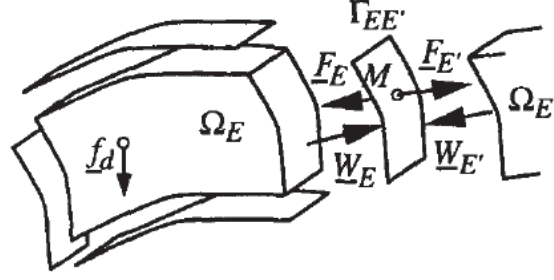


FIGURE 1.7 – Sous-structures et interfaces. [Ladevèze et Dureisseix, 1999]

structures :

$$\begin{array}{|l}
 \text{Equations de liaison :} \\
 \underline{U}_E \in \mathcal{U}_E, \\
 \underline{\varepsilon}_E = \underline{\varepsilon}(\underline{U}_E), \quad \underline{U}_E|_{\partial\Omega_E} = \underline{W}_E \\
 \text{Equations d'équilibre :} \\
 \underline{\sigma}_E \in \mathcal{S}_E, \\
 \forall \underline{U}^* \in \mathcal{U}_E, \quad \int_{\Omega_E} \text{Tr} [\underline{\sigma}_E : \underline{\varepsilon}(\underline{U}^*)] = \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^* \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E \cdot \underline{U}^* \, d\Gamma
 \end{array}
 \tag{1.3.1}$$

— Le groupe d'équations Γ qui traduit le comportement des matériaux et des interfaces :

$$\begin{array}{|l}
 \text{Relation de Comportement :} \\
 \underline{\sigma}_E = \mathcal{K} \underline{\varepsilon}_E \\
 \text{Comportement des interfaces :} \\
 \underline{W}_E = \underline{W}_{E'} \\
 \underline{F}_E + \underline{F}_{E'} = 0 \\
 \text{C.L. sur } \partial_f \Omega \text{ et } \partial_u \Omega.
 \end{array}
 \tag{1.3.2}$$

Dans le cas de la dimension 3, les ensembles sont définis de la façon suivante :

$$\mathcal{U}_E = [H^1(\Omega_E)]^3 \quad \mathcal{S}_E = [L^2(\Omega_E)]^6$$

Ainsi, tous les sous-domaines sont entièrement enveloppés par des interfaces. Ceux ayant une partie de leur frontière en commun avec la frontière du domaine complet, *i.e.* éventuellement soumis à des conditions aux limites, le sont également. Les équations d'interface présentées ci-dessus correspondent à un comportement parfait. Il est possible d'écrire de manière plus générale une équation reliant les interefforts au saut de déplacement (contact, élasticité, etc.). Le cadre formel de la méthode est celui d'une méthode de Schwarz sans recouvrement avec des conditions de raccord de type Robin.

1.3.2 Algorithme de résolution

La résolution est basée sur un algorithme itératif caractéristique de la méthode LaTIn.

- Les champs d'interface $s = (\underline{W}_E, \underline{F}_E)$ vérifiant (1.3.1) sont cherchés dans l'espace d'admissibilité \mathbf{A}_d .
- Les champs $\hat{s} = (\widehat{\underline{W}}_E, \widehat{\underline{F}}_E)$ vérifiant (1.3.2) sont cherchés dans l'espace $\mathbf{\Gamma}$ des comportements.

La solution exacte s_{exact} est à l'intersection de ces deux espaces : $s_{exact} = \mathbf{A}_d \cap \Gamma$. Elle est recherchée itérativement dans ces deux espaces comme montré figure (1.8).

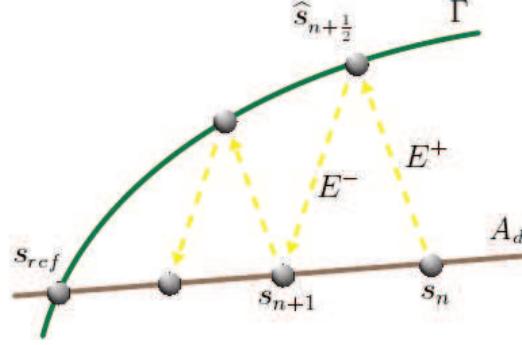


FIGURE 1.8 – Algorithme de résolution LaTIn [Kerfriden, 2008].

La résolution se fait donc successivement en deux étapes :

$$\begin{aligned}
 \textbf{Etape locale :} \quad & \text{trouver } \widehat{s}_{n+\frac{1}{2}} \in \Gamma \text{ tel que } (\widehat{s}_{n+\frac{1}{2}} - s_n) \in \mathbf{E}^+ \\
 \textbf{Etape linéaire :} \quad & \text{trouver } \widehat{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d \text{ tel que } (s_{n+1} - \widehat{s}_{n+\frac{1}{2}}) \in \mathbf{E}^-
 \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Les deux directions de recherche \mathbf{E}^+ et \mathbf{E}^- sont définies par :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}^+ \quad & \text{En tout point de } \Gamma_E, \quad (\widehat{F}_E - F_E) - k_E^+ (\widehat{W}_E - W_E) = 0 \\
 \mathbf{E}^- \quad & \text{En tout point de } \Gamma_E, \quad (\widehat{F}_E - F_E) + k_E^- (\widehat{W}_E - W_E) = 0
 \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Où k_E^+ et k_E^- sont des paramètres de la méthode.

Cette méthode originellement appelée MaGIT pour Méthode à Grand Incrément de Temps, visait la résolution non-incrémentale de problèmes avec des comportements non-linéaires. La convergence de la version décomposition de domaine qui vient d'être présentée a été démontrée dans le cadre des comportements à écrouissages positifs [Ladevèze, 1999] avec une relaxation de la solution à chaque itération.

1.3.3 Choix des champs de discrétisation

Après avoir décomposé la structure en sous-domaines et interfaces, on introduit une discrétisation en éléments finis de chacun de ces constituants. On discrétise les quantités suivantes :

- Le déplacement à l'intérieur des sous-domaines \underline{u} ;
- le déplacement sur les interfaces \underline{W} ;
- les interefforts \underline{F} .

Pour les déplacements internes aux sous-domaines, les choix habituels en mécanique sont conservés. En revanche, la discrétisation des quantités d'interface introduit une difficulté de cohérence imposée par la mise en œuvre numérique de la méthode : les problèmes discrets d'interfaces font intervenir des quantités de déplacement et d'effort n'ayant pas les mêmes propriétés de régularité. Elles devraient donc évoluer dans des espaces discrets différents, moins contraignants pour les quantités d'efforts à titre d'illustration.

Le passage de la formulation continue des équations d'interface à la version discrétisée impose ainsi un choix au niveau de l'interface qui est appliqué à la fois à des quantités de

déplacement \underline{W} et à des quantités d'effort \underline{F} [Dureisseix, 1997]. Les deux choix classiques de discrétisation sont présentés ci-après.

1.3.3.1 Approche nodale

La première approche de discrétisation, utilisée dans [Champaney, 2012], consiste à traiter toutes les quantités d'interfaces aux nœuds. Cette approche privilégie une bonne représentation des déplacements et a été exploitée dans le traitement parallèle de grands problèmes impliquant des interfaces de contact.

La résolution du problème de contact est réalisée très localement, nœud par nœud. Elle implique le calcul d'un indicateur scalaire permettant de statuer sur l'état décollé ou en contact du nœud, puis traite séparément les composantes normales à la surface des quantités nodales et les composantes tangentielles. Les algorithmes sont présentés en détail dans [Champaney, 1996].

Ce type de discrétisation est à rapprocher des choix habituels faits dans les méthodes présentées pour le traitement des interfaces parfaites. Fortement guidés par l'aspect numérique du problème, les interefforts sont proches des multiplicateurs de Lagrange utilisés couramment pour imposer une condition de continuité.

1.3.3.2 Approche aux points d'intégration

La deuxième approche de discrétisation consiste à privilégier la discrétisation des efforts sur les interfaces. C'est l'approche choisie dans [Loiseau, 2001; Ladevèze *et al.*, 2001; Nouy, 2003; Ladevèze et Nouy, 2003]. Ces efforts étant homogènes à des contraintes, ils sont représentés avec un degré de moins que les déplacements à l'intérieur des sous-domaines. Cette discrétisation appliquée aux déplacements implique des sauts aux bords des sous-structures qui sont interprétés comme des déformations associées à l'intereffort.

Les choix suivants sont ainsi classiques :

- Type P1 (degré 1) pour l'intérieur des sous-domaines ;
- Type P0 (degré 0) pour les bords des sous-domaines ;

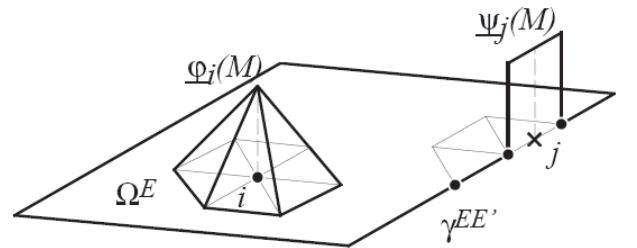


FIGURE 1.9 – Discretisations choisies [Dureisseix, 1997].

La figure 1.9 illustre les fonctions de formes en découplant. Une incompatibilité de discrétisation apparaît ainsi entre les déplacements des sous-domaines et ceux des interfaces. Théoriquement reliés par la relation de trace, celle-ci n'est vérifiée qu'au sens faible pour le passage à la discrétisation via un raccord de type Mortar [Bernardi *et al.*, 2005] :

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{u}_b - \mathbf{W}) \cdot \mathbf{F}^* = 0 \quad \forall \mathbf{F}^* \in \mathcal{F}_h \quad (1.3.5)$$

Où \mathcal{F}_h est l'espace discrétisé des efforts d'interface.

1.3.3.3 Anomalies et sur-discrétisation

Le choix des discrétisations présentées au paragraphe précédent pose problème, comme montré dans [Nouy, 2003]. Selon les choix de l'approche aux points d'intégration, il est impossible de définir a posteriori des interefforts discrétisés à partir d'une solution éléments finis en déplacement classique sur la sous-structure considérée. De plus, lorsqu'on choisit une discrétisation des quantités d'interface aux points d'intégration, l'énergie des modes très oscillants est mal prise en compte, ainsi :

- l'erreur commise sur l'énergie est non-négligeable dans les zones à fort gradient ou de discontinuité d'effort et peut engendrer l'amplification de modes parasites ;
- le problème discrétisé est mal conditionné, ce qui pénalise la convergence des algorithmes itératifs.

Une approche remède a été développée afin de pallier ce problème. Elle consiste à modifier les espaces de discrétisation sur l'interface et au voisinage de l'interface. On distingue deux versions :

- Solution de type “h” : on choisit de raffiner le maillage des sous-structures localement et près des bords ;
- Solution de type “p” : on choisit d'augmenter le degré d'interpolation des fonctions de forme des éléments de bord, ce qui revient à une sous-intégration des quantités d'interface.

Ces modifications sont illustrées figure 1.10.

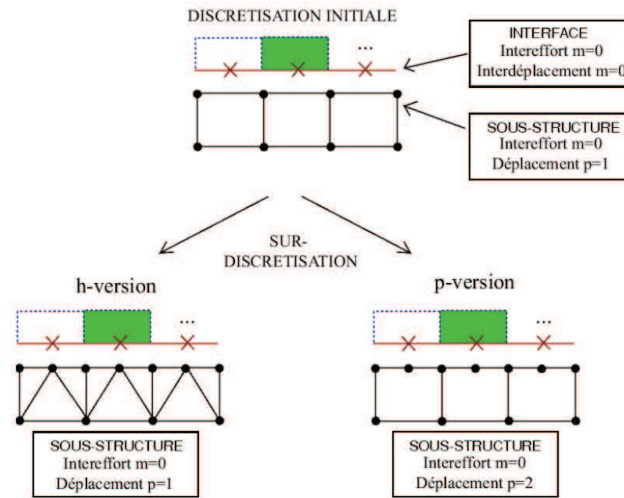


FIGURE 1.10 – Représentation de la méthode de sur-discrétisation. [Kerfriden, 2008]

Grâce à cette méthode, la solution discrétisée obtenue est de meilleure qualité et les performances des algorithmes itératifs de résolution sont améliorés par l'obtention d'un meilleur conditionnement du problème discrétisé. La figure (1.11) présente l'effet de la sur-discrétisation dans le cas de l'étude d'un demi-portique.

Si ces modifications apportent une amélioration indéniable, elle n'en font pas pour autant disparaître l'origine du problème. Ainsi, les performances de la méthode et la précision des quantités d'interface restent affectées par l'incompatibilité intrinsèque aux choix de discrétisation de type point de Gauss sur l'interface. L'approche proposée au chapitre 2

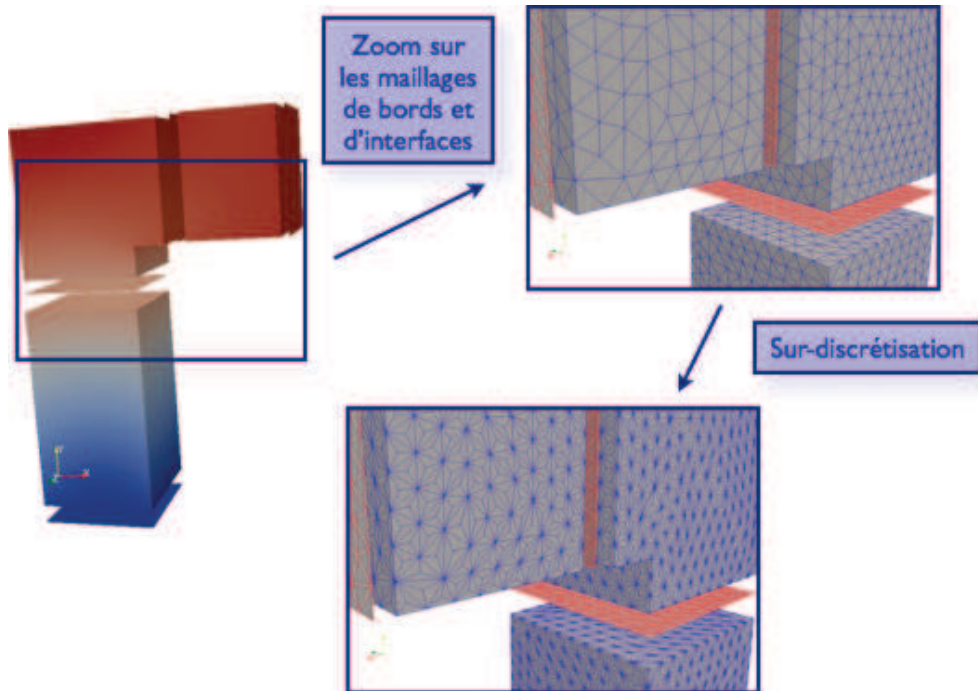


FIGURE 1.11 – Illustration de l’application de la sur-discrétisation de type h sur le bord d’une structure décomposée.

a pour ambition d’éliminer le besoin de ces modifications de discrétisation en évitant les incompatibilités de discrétisation.

Les travaux de développement de la méthode LaTIn basés sur la discrétisation des interfaces privilégiant les interefforts sont nombreux. S’assurer un traitement simple des interefforts présente des avantages lorsqu’est défini un problème grossier, comme présenté dans les paragraphes qui suivent.

1.3.4 Problème grossier et quantités macro

La méthode présentée jusqu’ici est la version dite monoéchelle de la méthode LaTIn. Lors de la résolution d’un problème mécanique avec la version monoéchelle, l’information de chargement des constituants est transmise de sous-structure en sous-structure à chaque itération via les interfaces. En conséquence, dans le cas où la décomposition met en jeu un grand nombre de sous-domaines ou dans le cas où la structure est élancée, beaucoup d’itérations sont nécessaires à une bonne transmission des informations et le taux de convergence se dégrade.

Pour pallier cela, on introduit un problème grossier, dit problème macroscopique, qui peut être interprété comme [Violeau, 2007] :

- un problème global ayant pour objet de fournir un bon préconditionneur pour la stratégie itérative ;
- une technique d’homogénéisation de sous-structures hétérogènes.

Les paragraphes qui suivent en décrivent les ingrédients principaux.

1.3.4.1 Séparation d'échelle

La définition du problème grossier repose sur la séparation des quantités d'interface en composantes macros et micros :

$$\forall (\underline{F}, \underline{W}) \in \mathcal{F}_{EE'} \times \mathcal{W}_{EE'}, \text{ en tout point de } \Gamma_{EE'}, \quad \begin{aligned} \underline{F} &= \underline{F}^M + \underline{F}^m \\ \underline{W} &= \underline{W}^M + \underline{W}^m \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Où les quantités \underline{X}^M sont dites macros et celles notées \underline{X}^m micros.

La méthode de séparation consiste, dans un premier temps, à définir des sous-espaces de dimensions finies $\mathcal{F}_{EE'}^M$ et $\mathcal{W}_{EE'}^M$ dans lesquels évoluent les quantités macroscopiques. Ce sont des sous-espaces de ceux dans lesquels évoluent les quantités de déplacement et d'efforts d'interface. Pour cela, on choisit leurs vecteurs de base. Les quantités microscopiques sont, ensuite, recherchées dans les espaces supplémentaires au sens des travaux d'interface notés $\mathcal{F}_{EE'}^m$ et $\mathcal{W}_{EE'}^m$. On a donc les relations :

$$\mathcal{F}_{EE'} = \mathcal{F}_{EE'}^M \oplus \mathcal{F}_{EE'}^m \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_{EE'} = \mathcal{W}_{EE'}^M \oplus \mathcal{W}_{EE'}^m \quad (1.3.7)$$

$$\begin{aligned} \forall (\underline{F}, \underline{W}) &\in \mathcal{F}_{EE'} \times \mathcal{W}_{EE'}, \\ (\underline{F}_E, \underline{W}_E)_{\Gamma_{EE'}} &= \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}_E \cdot \underline{W}_E \, dS = (\underline{F}_E^m, \underline{W}_E^m)_{\Gamma_{EE'}} + (\underline{F}_E^M, \underline{W}_E^M)_{\Gamma_{EE'}} \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Ainsi, les parties macroscopiques des efforts d'interface ne travaillent pas avec les parties microscopiques des déplacements. De même pour les parties microscopiques des efforts et macroscopiques des déplacements.

1.3.4.2 Bases et projecteurs macroscopiques

De manière générale, le problème grossier doit être suffisamment riche pour transmettre des informations assurant l'extensibilité de la méthode sans pour autant être trop coûteux afin de ne pas porter préjudice aux performances numériques. L'extraction des parties linéaires des quantités d'interface est le compromis généralement adopté pour la version multi-échelle de la méthode LaTIn. La construction des opérateurs de projection et des bases est détaillée dans [Loiseau, 2001; Violeau, 2007]. Les vecteurs de la base macroscopique sont définis à partir des vecteurs propres de la matrice d'inertie de l'interface. Ils permettent d'extraire des interefforts les résultantes et moments à l'interface, respectivement les translations et rotations des déplacements d'interface. A ces vecteurs sont ajoutés des vecteurs permettant d'extraire la partie linéaire des champs d'interface : les modes d'extension et de cisaillement. La base est construite orthogonale, au sens des travaux d'interface, normée lors d'une procédure de Schmidt. Une représentation de la base obtenue ainsi pour une interface plane d'un problème 3D est présentée figure 1.12.

Les vecteurs $\underline{e}_{EE',i}^M$ de la base macroscopique $B_{EE'}^M$ permettent de définir $\Pi_{EE'}^M$ le projecteur des champs de l'interface $\Gamma_{EE'}$ dans les espaces macroscopiques. On a alors :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{F}, \underline{W}) &\in \mathcal{F}_{EE'} \times \mathcal{W}_{EE'} \text{ et en tout point de } \Gamma_{EE'} : \\ \left\{ \begin{aligned} \underline{F}^M &= \Pi_{EE'}^M \underline{F} = \sum_{i=1}^{N_M} \langle \underline{e}_{EE',i}^M, \underline{F} \rangle \underline{e}_{EE',i}^M \\ \underline{W}^M &= \Pi_{EE'}^M \underline{W} = \sum_{i=1}^{N_M} \langle \underline{e}_{EE',i}^M, \underline{W} \rangle \underline{e}_{EE',i}^M \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

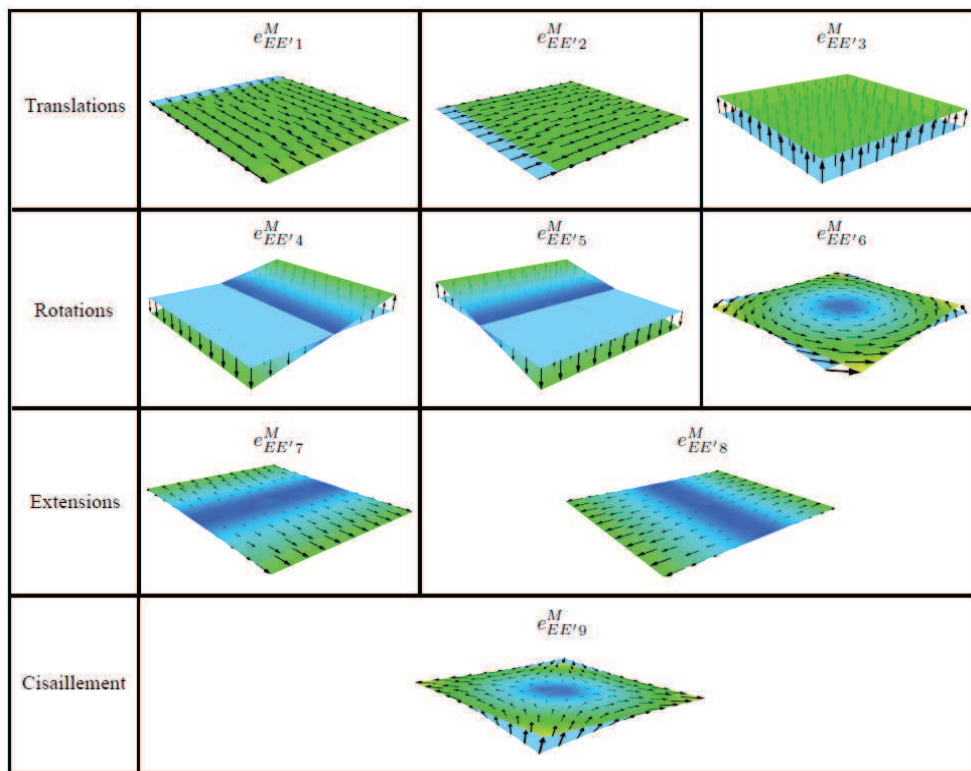


FIGURE 1.12 – Base macroscopique linéaire en 3D pour une interface plane. [Kerfriden, 2008]

1.3.4.3 Stratégie de résolution

La mise en place du problème grossier impose une modification de la résolution de la méthode LaTIn. La stratégie consiste à imposer que les champs vérifient leur admissibilité, un équilibre global sur la structure, et à modifier l'étape linéaire de sorte à imposer cet équilibre macroscopique.

Définition de l'admissibilité macroscopique des champs d'interface La relation de découplage (1.3.7) contraint la définition du comportement macroscopique. En effet, dans le cas d'une interface élastique non-homogène par exemple, l'orthogonalité au sens du comportement d'interface n'est pas vérifiée et la projection dans l'espace macroscopique n'a pas forcément de sens mécanique ([Kerfriden, 2008]). Aussi, dans [Nouy, 2003], il est proposé de n'imposer aux interfaces que la vérification de l'équilibre des efforts macroscopiques. Cette condition est vraie pour tous les types d'interfaces et permet d'atteindre l'extensibilité dans les cas linéaires. Pour les problèmes non linéaires, une modification de l'approche actualisant les directions de recherches dans le cas d'interfaces décrivant l'endommagement des matériaux composites est proposée dans [Kerfriden, 2008].

Il découle, de n'imposer que l'équilibre des efforts macroscopiques, un espace \mathcal{F}_{ad}^M d'admissibilité en statique suivant :

$$\mathcal{F}_{ad}^M = \left\{ \underline{F}_E^M \in \prod \mathcal{F}_E^M \mid \forall E, \left\{ \begin{array}{l} \forall E' \in V_E, \text{ sur } \Gamma_{EE'}, \underline{F}_E^M + \underline{F}_{E'}^M = 0 \\ \text{et} \\ \text{Si } \Gamma_E \cap \partial\Omega_f \neq \emptyset, \text{ sur } \Gamma_{E_d}, \underline{F}_E^M + \Pi_E^M \underline{F}_d = 0 \end{array} \right. \right\}$$

Modification de l'étape linéaire Les conditions d'admissibilité macroscopique sont traduites par la mise en place d'un Lagrangien dont il faut chercher le point selle dans $(\prod_E \mathcal{F}_E) \times \mathcal{W}_{ad}^M$.

$$\begin{aligned} \phi(\underline{F}_E, \widetilde{\underline{W}}_E^M) &= \sum_E \frac{1}{2} \int_{\Gamma_E} k_E^{-1} (\underline{F}_E - \widehat{\underline{F}}_E)^2 \, d\Gamma \\ &+ \sum_E \int_{\Gamma_E} (\underline{W}_E - \widehat{\underline{W}}_E)(\underline{F}_E - \widehat{\underline{F}}_E) \, d\Gamma \\ &- \sum_E \int_{\Gamma_E} \underline{F}_E \cdot \widetilde{\underline{W}}_E^M \, d\Gamma - \sum_E \int_{\Gamma_E \cap \partial\Omega_f} (\underline{F}_E - \underline{F}_d) \cdot \widetilde{\underline{W}}_E^M \, d\Gamma \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Il implique l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange $\widetilde{\underline{W}}_E^M$ qui évolue dans l'espace des déplacements macro admissibles \mathcal{W}_{ad}^M défini par :

$$\mathcal{W}_{ad}^M = \left\{ \underline{W}_E^M \in \prod \mathcal{W}_E^M \mid \forall E, \left\{ \begin{array}{l} \forall E' \in V_E, \text{ sur } \Gamma_{EE'}, \underline{W}_E^M - \underline{W}_{E'}^M = 0 \\ \text{et} \\ \text{Si } \Gamma_E \cap \partial\Omega_u \neq \emptyset, \text{ sur } \Gamma_{E_d}, \underline{W}_E^M = 0 \end{array} \right. \right\}$$

La recherche d'extremum du Lagrangien entraîne la modification de l'équation locale de direction de recherche et l'équation d'admissibilité macroscopique suivantes, respectivement :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\underline{W}_E, \underline{F}_E) \in \prod_E (\mathcal{W}_E \times \mathcal{F}_E) \text{ tel que, } \forall E, \forall \underline{W}_E^* \in \mathcal{W}_E^0 : \\ &\int_{\Gamma_E} ((\underline{F}_E - \widehat{\underline{F}}_E) + k_E^-(\underline{W}_E - \widehat{\underline{W}}_E) - k_E^- \widetilde{\underline{W}}_E^M) \cdot \underline{W}_E^* \, d\Gamma = 0 \\ &\forall \underline{W}_E^{M*} \in \mathcal{W}_{ad}^M, \sum_E \int_{\Gamma_E} \underline{F}_E \cdot \widetilde{\underline{W}}_E^{M*} \, d\Gamma = \sum_E \int_{\partial\Omega_f} \underline{F}_d \cdot \widetilde{\underline{W}}_E^{M*} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

L'objectif de la stratégie de résolution habituelle est d'obtenir un problème macroscopique formulé en variable primale. Pour cela, on calcule une relation couplant \underline{F}_E^M et $\underline{\widetilde{W}}_E^M$. On part de l'équation :

$$\int_{\Gamma_E} \left((\underline{F}_E - \widehat{\underline{F}}_E) + k_E^-(\underline{W}_E - \widehat{\underline{W}}_E) - k_E^- \underline{\widetilde{W}}_E^M \right) \cdot \underline{W}_E^* \, d\Gamma = 0$$

de laquelle on tire :

$$\int_{\Gamma_E} \underline{F}_E \cdot \underline{W}_E^* \, d\Gamma = \int_{\Gamma_E} \left(\widehat{\underline{F}}_E + k_E^- \widehat{\underline{W}}_E + k_E^+ \underline{\widetilde{W}}_E^M \right) \cdot \underline{W}_E^* \, d\Gamma - \int_{\Gamma_E} k_E^- \underline{W}_E \cdot \underline{W}_E^* \, d\Gamma$$

Par ailleurs, l'équation d'équilibre des sous-domaines de (1.3.1), en utilisant la relation de comportement de ces sous-domaines et la relation de trace, s'écrit :

$$\int_{\Omega_E} \text{Tr} \left[\underline{\varepsilon}(\underline{u}^*) \mathcal{K}_{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*) \right] = \int_{\Omega_E} \underline{\mathbf{f}}_d \cdot \underline{u}^* \, d\Omega + \int_{\Gamma_E} \underline{F}_E \cdot \underline{W}_E^* \, d\Gamma$$

En remplaçant le dernier terme de l'équation précédente on obtient :

$$\int_{\Omega_E} \text{Tr} \left[\underline{\varepsilon}(\underline{u}^*) \mathcal{K}_{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*) \right] + \int_{\Gamma_E} k_E^- \underline{W}_E \cdot \underline{W}_E^* \, d\Gamma = \int_{\Omega_E} \underline{\mathbf{f}}_d \cdot \underline{u}^* \, d\Omega + \int_{\Gamma_E} \left(\widehat{\underline{F}}_E + k_E^- \widehat{\underline{W}}_E + k_E^+ \underline{\widetilde{W}}_E^M \right) \cdot \underline{W}_E^* \, d\Gamma$$

La linéarité de cette équation, permet d'obtenir la relation suivante qui lie la trace du déplacement solution aux efforts d'interface :

$$\forall \underline{W}_E^* \in \mathcal{W}_E^0, \quad \int_{\Gamma_E} \underline{W}_E \cdot \underline{W}_E^* \, d\Gamma = \int_{\Gamma_E} \left(\mathbb{H}_E \left(\widehat{\underline{F}}_E + k_E^- \widehat{\underline{W}}_E + k_E^+ \underline{\widetilde{W}}_E^M \right) + \underline{W}_{E_d}^c \right) \underline{W}_E^* \, d\Gamma \quad (1.3.12)$$

Où on a :

- L'opérateur \mathbb{H}_E est le complément de Schur dual de la sous-structure E augmenté par la direction de recherche.
- Le champs d'interface $\underline{W}_{E_d}^c$ résulte de la condensation duale des efforts volumiques de E sur Γ_E .

Les interefforts sont ensuite obtenus grâce à la partie locale de la direction de recherche et à une projection dans l'espace macroscopique :

$$\forall \underline{W}_E^{M*} \in \mathcal{W}_E^{M0}, \quad \int_{\Gamma_E} \underline{F}_E \cdot \underline{W}_E^{M*} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_E} \left(\mathbb{L}_E^M \underline{\widetilde{W}}_E^M + \underline{\widetilde{F}}_E^M \right) \cdot \underline{W}_E^{M*} \, d\Gamma \quad (1.3.13)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbb{L}_E^M &= k_E^- - k_E^- \mathbb{H}_E k_E^- \\ \underline{\widetilde{F}}_E^M &= \widehat{\underline{F}}_E + k_E^- \widehat{\underline{W}}_E - k_E^- \left(\mathbb{H}(\widehat{\underline{F}}_E + k_E^- \widehat{\underline{W}}_E) + \underline{W}_{E_d}^c \right) \end{cases}$$

La version décomposition de domaine de la méthode LaTIn présente un cadre avantageux pour la modélisation d'interfaces aux comportements autres que parfait. Elle est extensible et a été éprouvée sur le traitements de plusieurs problèmes industriels, dont la simulation de grands assemblages (boulonnés) ou la simulation du comportement de matériaux composites, représentant des phénomènes de délaminage. Cependant, les choix de discrétisations habituels pénalisent la précision et l'efficacité du solveur itératif. Le chapitre suivant propose de reprendre certains ingrédients de cette méthode, appropriés pour les applications visées, et de changer les choix de dualité afin d'éliminer les problématiques d'incompatibilité des discrétisations.

Une méthode de décomposition de domaine mixte pour le calcul des assemblages

Contents

2.1	Écriture de la méthode sous forme continue	38
2.1.1	Ecriture continue du problème décomposé	38
2.1.2	Choix d'un représentant de l'effort d'interface	39
2.1.3	La fermeture du système : équations de directions de recherche	40
2.1.4	Formulation continue d'une itération sur un exemple linéaire à interfaces parfaites	41
2.2	Formulation discrétisée de la méthode proposée	42
2.2.1	Choix de discrétisation	42
2.2.2	Opérateurs discrétisés de la méthode	42
2.2.3	Formulation discrète d'une itération de la méthode sur un exemple linéaire à interface parfaite	45
2.3	Ajout d'une deuxième échelle pour l'extensibilité	48
2.3.1	Principe général	48
2.3.2	Ecriture sur-condensée du problème macroscopique	48
2.3.3	Résolution du problème macroscopique	51
2.4	Traitement des interfaces de contact	53
2.4.1	Formulation du problème de contact dans le cadre de la méthode développée	53
2.4.2	Résolution du problème discret	55

L'objectif principal de la méthode développée dans ce chapitre est la simulation d'assemblages complexes. Afin de couvrir un éventail le plus large possible de comportements d'interface, le cadre d'une méthode de décomposition de domaine de type mixte a été retenu pour la liberté de modélisation qu'il offre.

Par souci d'efficacité, on s'assurera que la méthode est extensible à un nombre important de sous-domaines. Enfin, envisager une exploitation des quantités d'interface pour le dimensionnement d'une structure impose d'en obtenir une bonne représentation.

Ce chapitre présente la méthode développée en partant de la formulation continue généralisée de la méthode LaTIn. L'utilisation du théorème de représentation de Riesz permet d'introduire un nouveau représentant dual de l'inter-effort. La deuxième partie montre l'influence de ce choix sur la formulation discrétisée de la méthode itérative ainsi obtenue. Les aspects extensibilité sont abordés dans la troisième partie. Le chapitre se clôt sur la formulation et le traitement du problème mécanique sur les interfaces de contact.

2.1 Écriture de la méthode sous forme continue

La méthode proposée se base sur l'utilisation de liens entre sous-domaines formulés de manière mixte, portant sur les déplacements et les efforts d'interface. Elle reprend l'algorithme de résolution de la méthode LaTIn impliquant la séparation des équations en deux groupes. Dans un premier temps, et pour des raisons de clarté, la méthode est décrite dans sa version mono-échelle *i.e.* sans problème grossier.

2.1.1 Ecriture continue du problème décomposé

On se place dans le cadre d'un comportement de la sous-structure linéaire élastique sous l'hypothèse des petites perturbations pour simplifier les écritures et les analyses.

2.1.1.1 Décomposition du domaine en constituants simples

On repart de la décomposition du domaine à étudier Ω en constituants simples de la méthode LaTIn (Cf. 1.3.1) :

- Les sous-domaines Ω^s ;
- Les interfaces Γ^s .

Chaque constituant possède son propre jeu de variables reliées entre elles par des équations décrivant leur comportement :

- Déplacements, déformations et contraintes pour les sous-domaines ;
- Déplacements et inter-efforts pour les interfaces.

Cette décomposition est illustrée figure 2.1.

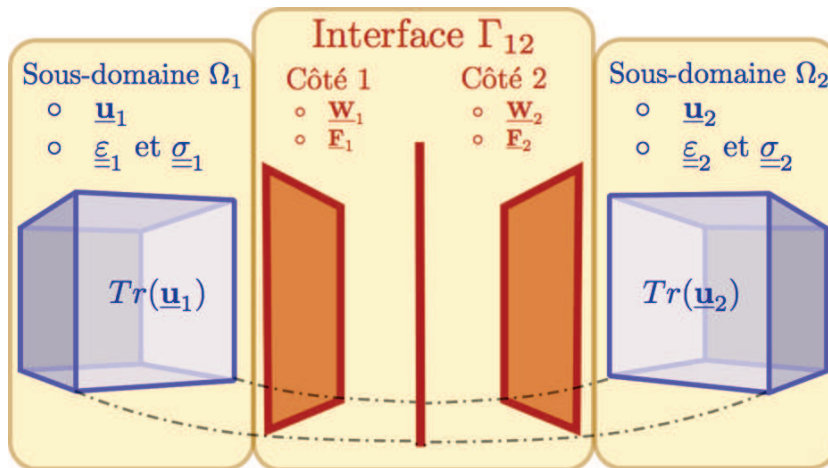


FIGURE 2.1 – Sous-structuration sur un cas à deux sous-domaines.

Une interface entre deux sous-domaines est constituée de deux faces, chacune en correspondance avec un seul sous-domaine.

2.1.1.2 Séparation des équations

Les équations de comportement des constituants sont séparées en deux groupes : un premier pour les sous-domaines et un second pour les interfaces.

La solution $\mathbf{S} = \{(\underline{u}^s, \underline{W}^s, \underline{\underline{\sigma}}^s, \underline{F}^s), s \in [1; N_s]\}$ doit ainsi vérifier :

- Le groupe d'équations \mathbf{G}^{Ω^s} qui traduit l'admissibilité du comportement des sous-structures :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Equations de liaison :} \\ \underline{u}^s \in H^1(\Omega^s) \\ \underline{W}^s = Tr^s(\underline{u}^s) \\ \text{Equations d'équilibre :} \\ \forall \underline{u}^* \in H_0^1(\Omega^s) \int_{\Omega^s} \underline{\underline{\sigma}}^s : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*) \, d\Omega = \int_{\Omega^s} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* \, d\Omega + \langle \underline{F}^s; \underline{u}^* \rangle \end{array} \right\} (\mathbf{G}^{\Omega^s})$$

- Le groupe d'équations \mathbf{G}^{Γ^s} qui traduit le comportement des matériaux et des interfaces :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Relation de Comportement :} \\ \underline{\underline{\sigma}}^s = \mathcal{K} : \underline{\underline{\varepsilon}}^s \\ \text{Comportement des interfaces :} \\ \text{Cas général :} \quad \underline{F}^s = b(\underline{W}^r - \underline{W}^s) \\ \text{Cas interface parfaite :} \quad \underline{W}^s = \underline{W}^r, \quad \underline{F}^s + \underline{F}^r = 0, \\ \text{Conditions aux limites :} \quad \text{sur } \partial_f \Omega \text{ et } \partial_u \Omega. \end{array} \right\} (\mathbf{G}^{\Gamma^s})$$

La formulation de l'équilibre des sous-domaines ne fait aucune hypothèse sur la régularité des efforts \underline{F}^s sur le bord des sous-domaines. Les travaux de ces efforts sont pris en compte par la dualité générique qui apparaît dans l'application stricte de la formule de Green-Lagrange [Brezzi et Fortin, 1991].

On notera également que chaque sous-structure est en fait enveloppée par des interfaces sur tous ses bords. Les sous-domaines ayant une frontière commune avec une frontière de Ω soumise à des conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann seront soumis à ces sollicitations via une interface avec l'extérieur. Les équations de conditions aux limites sont ainsi classées dans le groupe d'équations d'interface. Les équations de comportement de l'interface permettront de faire le lien entre les deux côtés.

2.1.2 Choix d'un représentant de l'effort d'interface

La formulation continue de l'équilibre présentée ci-dessus ne privilégie ni les déplacements ni les efforts dans le calcul du travail.

L'originalité de la méthode proposée dans ce chapitre repose sur le choix d'un cadre mathématique ayant pour objectif :

- de s'affranchir des difficultés habituelles de discrétisation et des procédures visant à corriger les approximations introduites : éviter d'avoir à privilégier effort (souvent par une discrétisation P0) ou déplacements (souvent par une discrétisation P1) et d'avoir à mettre en œuvre des artifices de discrétisation (sur-discrétisation ou sous-intégration) ;

- de vérifier exactement la relation de trace sans avoir à représenter les efforts d'interface comme des réactions nodales : lorsqu'une discrétisation P0 est choisie pour les quantités d'interface, les déplacements sont décrits au points de Gauss de l'interface. Sur le bord des sous-domaines, ils sont calculés aux nœuds. L'incompatibilité de discrétisation impose, même dans le cas de nœuds coïncidents, de vérifier la relation de trace de manière faible par une formulation de type Mortar ;
- d'avoir une bonne précision dans la description des interefforts : afin de gérer au mieux un maximum de comportement physique des interfaces, on souhaite éviter de réduire leur représentation à des réactions nodales.

On s'appuie sur les travaux de [Bernardi *et al.*, 2008] présentés au paragraphe 1.2.1.7 et on applique le théorème de représentation de Riesz à la forme de travail $b_{\underline{F}}(\cdot)$ associée à l'intereffort \underline{F} :

$$b_{\underline{F}}(\underline{W}) = \langle \underline{F}(\underline{x}); \underline{W}(\underline{x}) \rangle^* \quad (2.1.1)$$

Les crochets $\langle \cdot; \cdot \rangle^*$ représentent la dualité entre déplacement d'interface et intereffort.

Les déplacements d'interface \underline{W} appartenant à $H^{1/2}(\Gamma)$ et $b_{\underline{F}}(\cdot)$ à l'espace $H^{-1/2}(\Gamma)$, le théorème de représentation de Riesz appliqué à ces quantités s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall b_{\underline{F}}(\cdot) \in H^{-1/2}(\Gamma), \exists ! \underline{T} \in H^{1/2}(\Gamma) \text{ tel que :} \\ \forall \underline{W} \in H^{1/2}(\Gamma), \quad b_{\underline{F}}(\underline{W}) = \langle \underline{F}, \underline{W} \rangle^* = \langle \underline{T}, \underline{W} \rangle_{H^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

où le produit scalaire de $H^{1/2}(\Gamma)$ est donné par [Adams, 2003] :

$$\langle \underline{W}, \underline{T} \rangle_{H^{1/2}} = \int_{\Gamma} \underline{W}(\underline{x}) \underline{T}(\underline{x}) \, d\underline{x} + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{(\underline{W}(\underline{x}) - \underline{W}(\underline{y}))(\underline{T}(\underline{x}) - \underline{T}(\underline{y}))}{|\underline{x} - \underline{y}|^d} \, d\underline{x} \, d\underline{y} \quad (2.1.3)$$

L'application du théorème permet d'introduire un représentant \underline{T} de l'intereffort \underline{F} qui appartient au même espace que \underline{W} , le déplacement sur l'interface. La méthode développée dans le cadre de ces travaux se base sur l'utilisation de ce représentant des interefforts pour écrire les équations régissant le comportement des sous-domaines et des interfaces.

Dans les équations qui décrivent le comportement des sous-domaines, tout calcul de travail impliquant un intereffort est remplacé par un produit scalaire de $H^{1/2}(\Gamma^s)$ avec le nouveau représentant \underline{T} . Au niveau des interfaces, l'écriture faible des équations servant à leur discrétisation ouvre la porte de la reformulation des comportements d'interface avec ce représentant appartenant à $H^{1/2}(\Gamma^s)$.

2.1.3 La fermeture du système : équations de directions de recherche

Le solveur itératif de la méthode LaTIn est adapté à la dualité choisie. Les directions de recherche fermant le système complet et dont le rôle est de permettre le passage d'un

groupe d'équations à l'autre sont réécrites sur les \underline{T} .

Etape d'interface :

Connaissant $(\underline{W}_n^s, \underline{T}_n^s)$ vérifiant (\mathbf{G}^{Ω^s}) trouver $(\underline{W}_{n+\frac{1}{2}}^s, \underline{T}_{n+\frac{1}{2}}^s)$ vérifiant (\mathbf{G}^{Γ^s}) tel que :

$$\text{En tout point de } \Gamma^s, \left(\underline{T}_{n+\frac{1}{2}}^s - \underline{T}_n^s \right) + k_+^s \left(\underline{W}_{n+\frac{1}{2}}^s - \underline{W}_n^s \right) = 0$$

Etape de sous-domaines :

Connaissant $(\underline{W}_{n+\frac{1}{2}}^s, \underline{T}_{n+\frac{1}{2}}^s)$ vérifiant (\mathbf{G}^{Γ^s}) trouver $(\underline{W}_{n+1}^s, \underline{T}_{n+1}^s)$ vérifiant (\mathbf{G}^{Ω^s}) tel que :

$$\text{En tout point de } \Gamma^s, \left(\underline{T}_{n+1}^s - \underline{T}_{n+\frac{1}{2}}^s \right) + k_-^s \left(\underline{W}_{n+1}^s - \underline{W}_{n+\frac{1}{2}}^s \right) = 0 \quad (2.1.4)$$

On introduit ainsi deux paramètres de la méthode k_+^s et k_-^s . A priori matriciels, ces opérateurs sont en pratique choisis scalaires et égaux pour les deux étapes. Leur définition par interface est en revanche conservée.

2.1.4 Formulation continue d'une itération sur un exemple linéaire à interfaces parfaites

Sous l'hypothèse d'un comportement linéaire élastique et d'une interface parfaite entre deux sous-domaines, on se propose de réécrire les équations continues avec le représentant \underline{T} de l'intereffort. Une itération complète de la méthode est composée de la succession des deux résolutions des problèmes sur les interfaces et sur les sous-domaines. Chacun des problèmes constituant les demi-itérations est défini par le comportement du constituant enrichi de l'équation de direction de recherche.

Etape d'interface Pour le cas d'une interface parfaite, le comportement est complété par la direction de recherche pour obtenir le couple $(\underline{W}_{n+\frac{1}{2}}^s, \underline{T}_{n+\frac{1}{2}}^s)$ vérifiant (\mathbf{G}^{Γ^s}) :

$$\left| \begin{array}{lcl} \underline{W}_{n+\frac{1}{2}}^s - \underline{W}_{n+\frac{1}{2}}^r & = & 0 \\ \underline{T}_{n+\frac{1}{2}}^s + \underline{T}_{n+\frac{1}{2}}^r & = & 0 \\ \left(\underline{T}_n^s - \underline{T}_{n+\frac{1}{2}}^s \right) + k_+^s \left(\underline{W}_n^s - \underline{W}_{n+\frac{1}{2}}^s \right) & = & 0 \\ \left(\underline{T}_n^r - \underline{T}_{n+\frac{1}{2}}^r \right) + k_-^r \left(\underline{W}_n^r - \underline{W}_{n+\frac{1}{2}}^r \right) & = & 0 \end{array} \right. \quad (2.1.5)$$

Etape de sous-domaine On cherche le couple $(\underline{W}_{n+1}^s, \underline{T}_{n+1}^s)$ vérifiant (\mathbf{G}^{Ω^s}) en résolvant le problème en $\underline{u} \in H^1(\Omega^s)$ suivant :

$$\int_{\Omega^s} \underline{\sigma}^s : \underline{\varepsilon}^* \, d\Omega + k_E^- \langle \underline{W}_n^s, \underline{W}^* \rangle_{H^{1/2}} = \langle k_-^s \underline{W}_{n-\frac{1}{2}}^s + \underline{T}_{n-\frac{1}{2}}^s, \underline{W}^* \rangle_{H^{1/2}} + \int_{\Omega^s} \underline{f} \cdot \underline{u}^* \, d\Omega \quad (2.1.6)$$

Les itérations ainsi définies se poursuivent jusqu'à convergence sur les quantités des sous-domaines et des interfaces. La convergence de cet algorithme a été démontrée dans [Ladevèze, 1999] moyennant l'introduction d'un paramètre de relaxation de la solution à chaque itération complète. Ce paramètre est habituellement choisi égal à 0.8. D'une manière générale, on s'autorisera à le prendre au plus proche de 1 pour des raisons d'efficacité.

La méthode ainsi réécrite ne fait intervenir sur l'interface que des quantités homogènes à des déplacements. Le passage à la formulation discrète s'en trouve simplifié.

2.2 Formulation discrétisée de la méthode proposée

L'utilisation d'un représentant de l'inter-effort appartenant à $H^{1/2}(\Gamma^s)$ permet de simplifier les choix de discrétisation. Les déplacements et les efforts d'interface évoluent dans le même espace, la discrétisation choisie pour les quantités d'interface est donc applicable aux deux quantités. Les problèmes sur les interfaces et les sous-domaines sont traités, dans la suite de cette section, par la méthode des éléments finis.

2.2.1 Choix de discrétisation

Les déplacements à l'intérieur des sous-domaines sont discrétisés de manière standard par la méthode des éléments finis. On prend pour discrétisation des quantités d'interfaces, toutes deux homogènes à des déplacements, la trace de la discrétisation des sous-domaines. Le formalisme permet ainsi d'éviter les incompatibilités entre le bord des sous-domaines et les interfaces. Grâce à ce choix, on s'affranchit de la nécessité d'utiliser des artifices de discrétisations supplémentaires (Cf. 1.3.3.3).

A titre d'exemple, une discrétisation $P1$ (de degré 1) sera choisie dans les applications traitées au chapitre 4, à la fois pour les déplacements à l'intérieur des sous-domaines et pour les quantités d'interfaces.

2.2.2 Opérateurs discrétisés de la méthode

Avant de décrire les étapes de mise en œuvre de la méthode au niveau discret, les paragraphes suivants introduisent les différents opérateurs nécessaires.

2.2.2.1 Matrice de masse \mathbf{M}

La matrice de masse apparaît lors du calcul des travaux. Elle est la discrétisation de la dualité choisie entre quantités cinématiques et quantités d'effort. En exploitant le fait que les fonctions de forme sont les mêmes pour les déplacements et les représentants de l'effort d'interface introduits, on obtient :

$$\langle \underline{W} ; \underline{T} \rangle_{H^{1/2}} = \left\langle \sum_i \mathbf{W}_i \phi_i ; \sum_j \mathbf{T}_j \phi_j \right\rangle_{H^{1/2}} = \mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \quad (2.2.1)$$

Apparaissant à plusieurs reprises dans l'algorithme de la méthode, elle implique la capacité à calculer explicitement le produit scalaire de la dualité choisie, dans le cas présent, celui de $H^{1/2}(\Gamma^s)$. La matrice obtenue pour cette dualité est pleine, son calcul fait l'objet du chapitre 3. Son coût de calcul sera nécessairement supérieur à celui requis pour calculer la matrice tridiagonale, plus courante, lorsque les travaux d'interface sont calculés par un produit scalaire de $L^2(\Gamma^s)$.

Or le lien exact au niveau discrétisé entre les déplacements du bord d'un sous-domaine et les inter-efforts est le complément de Schur. Matrice également pleine qui traduit le fait qu'on ne peut dissocier l'évolution d'une partie de l'interface d'une autre, aussi spatialement distante soit-elle. Dans le cas d'une matrice tridiagonale ou diagonale (*lumpée*), l'influence du comportement à un nœud de l'interface est restreinte, au mieux, à ses voisins immédiats. L'utilisation d'une matrice de masse pleine introduit l'influence globale du comportement local, naturellement pondérée par la formulation du produit scalaire.

On verra dans le chapitre 4 que le surcoût de calcul de la matrice, réalisé une seule fois à l'initialisation, est récompensé par une amélioration de la précision et de la convergence de la méthode.

2.2.2.2 Matrice de passage sous-domaines - interface \mathbf{N}

La matrice de passage \mathbf{N} est introduite initialement dans la version multi-échelle de la méthode LaTIn pour traiter les incompatibilités de discrétisations entre sous-domaines et interfaces.

Elle est obtenue par la discrétisation de la formulation faible de l'égalité des déplacements dans un lien de type Mortar.

$$\langle (\underline{u}_b - \underline{W}) ; \underline{F}^* \rangle = 0 \quad \forall \underline{F}^* \in H^{-1/2}(\Gamma^s) \quad (2.2.2)$$

La convention adoptée pour \mathbf{N} est le sens sous-structure vers interface.

$$\mathbf{N} \mathbf{u}_b = \mathbf{W} \quad (2.2.3)$$

On se place dans le cadre discrétisé éléments finis, l'interface a N_Γ nœuds, le bord de la sous-structure traitée lui correspondant en a $N_{\partial\Omega}$.

Le lien faible entre déplacements s'écrit en introduisant un représentant \underline{T}^* de l'intereffort test \underline{F}^* :

$$\sum_{i=1}^{N_{\partial\Omega}} \langle \phi_k ; Tr(\varphi_i) \rangle \mathbf{u}_{bi} = \sum_{j=1}^{N_\Gamma} \langle \phi_k ; \phi_j \rangle \mathbf{W}_j \quad \forall k \in [1, N_\Gamma] \quad (2.2.4)$$

Où $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ représente la dualité choisie à l'interface. En introduisant une matrice Mortar \mathbf{G} , on obtient sous forme algébrique :

$$\mathbf{G} \mathbf{u}_b = \mathbf{M} \mathbf{W} \quad (2.2.5)$$

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{u}_b = \mathbf{W}$$

Et au final, la matrice de passage \mathbf{N} utilisée initialement dans la méthode LaTIn est :

$$\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} \quad (2.2.6)$$

La discrétisation compatible obtenue par le choix de dualité proposé dans les paragraphes précédents ne nécessite pas l'utilisation d'une telle matrice : le vecteur de déplacements éléments finis de l'interface est strictement égal à celui des déplacements du bord du sous-domaine. En effet, dans le cas de maillages compatibles entre deux sous-domaines, et par conséquent l'interface qui les relie, on aura la vérification de la relation de trace :

$$\forall i \in [1, N_{\partial\Omega}] \quad Tr(\varphi_i) = \phi_i \quad \text{d'où} \quad \mathbf{G} = \mathbf{M} \quad (2.2.7)$$

Ainsi, la relation (2.2.4) devient alors :

$$\mathbf{M} \mathbf{u}_b = \mathbf{M} \mathbf{W} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{u}_b = \mathbf{W} \quad (2.2.8)$$

Pour le traitement de maillages incompatibles, l'incompatibilité est conservée dans le lien entre sous-domaines et interface. Les deux côtés de l'interface ont ainsi un maillage compatible, facilitant la gestion des comportements. Une possibilité est de désigner un des maillages des bords des sous-structures en vis-à-vis comme « maître » et de l'utiliser comme patron pour mailler les interfaces.

2.2.2.3 La direction de recherche \mathbf{k}

Les opérateurs de direction de recherche permettent de passer du jeu d'équations des interfaces à celui des sous-domaines, et inversement. Liant un saut de déplacement à un déséquilibre des efforts d'interface, elles sont interprétées comme des ressorts entre les sous-domaines et les interfaces.

Même si leurs valeurs optimales sont liées au complément de Schur du complément de la sous-structure considérée, elles sont souvent prises scalaires pour des raisons de simplicité d'implémentation et de coût de calcul.

La valeur approchée retenue pour un comportement élastique des sous-structures s'appuie sur le module d'Young E et sur la longueur d'interface L_Γ :

$$\mathbf{k} = k_{fact} \times \frac{E}{L_\Gamma} \quad (2.2.9)$$

où k_{fact} est un paramètre qu'il conviendra d'ajuster.

Impact de la dualité proposée : Les équations de directions de recherches sont écrites au niveau continu. Leur passage au niveau discret passe également par une formulation faible. En posant :

$$\delta A = A^n - A^{n-\frac{1}{2}} \quad (2.2.10)$$

On l'écrit sous forme faible de la façon suivante :

$$\langle \underline{W}^* ; k\delta\underline{W} \rangle_{H^{1/2}} + \langle \underline{W}^* ; \delta\underline{T} \rangle_{H^{1/2}} = 0 \quad \forall \underline{W}^* \in H^{1/2}(\Gamma) \quad (2.2.11)$$

qui permet d'obtenir :

$$\delta\mathbf{T} + \mathbf{k}\delta\mathbf{W} = 0 \quad (2.2.12)$$

En multipliant cette équation (2.2.12) par $\mathbf{M}_{H^{1/2}}$ et utilisant le lien fourni par le théorème de Riesz entre la représentation des efforts \mathbf{F} par la dualité $L^2(\partial\Omega^s)$ et la représentation visée \mathbf{T} est : $\mathbf{F} = \mathbf{M}_{H^{1/2}}\mathbf{T}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{H^{1/2}}\delta\mathbf{T} + \mathbf{M}_{H^{1/2}}\mathbf{k}\delta\mathbf{W} &= 0 \\ \delta\mathbf{F} + \mathbf{M}_{H^{1/2}}\mathbf{k}\delta\mathbf{W} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

En comparaison avec la version traditionnelle de la méthode LaTIn, on constate que la matrice de masse vient ainsi jouer le rôle d'un préconditionneur de la direction de recherche. $\mathbf{M}_{H^{1/2}}$ étant une matrice pleine, la direction de recherche du groupe d'équations régissant le comportement d'interface vient ainsi coupler les efforts en un nœud de l'interface aux déplacements sur toute l'interface. Cette non-localité sera retrouvée dans les formulations plus élaborées des comportements d'interfaces. Elle complexifie parfois l'implémentation de leurs résolutions mais elle est également essentielle aux bonnes performances de la méthode proposée.

Les ingrédients principaux étant réunis, on est en mesure d'écrire une itération de la méthode proposée au niveau discret.

2.2.3 Formulation discrète d'une itération de la méthode sur un exemple linéaire à interface parfaite

On se propose d'écrire les deux demi-itérations sous la forme discrétisée de la méthode proposée. L'initialisation de l'algorithme se fait par une pseudo-étape sur les interfaces dans laquelle on fixe déplacements et efforts d'interfaces :

- à 0 pour les interfaces internes au domaines étudiées ;
- à la valeur imposée pour les interfaces de conditions aux limites.

On enchaîne ensuite avec la première étape sur les équations des sous-structures.

2.2.3.1 Étape de sous-domaines

L'étape de sous-domaines consiste à résoudre l'ensemble des équations d'équilibre, de trace et de direction de recherche. Ceci peut-être écrit en substituant la deuxième dans la première, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_p^\diamond \mathbf{W}_{n+\frac{1}{2}}^\diamond &= \mathbf{b}_p^\diamond + \mathbf{M}^\diamond \mathbf{T}_{n+\frac{1}{2}}^\diamond \\ (\mathbf{T}_{n+\frac{1}{2}}^\diamond - \mathbf{T}_n^\diamond) + \mathbf{k}_-^\diamond (\mathbf{W}_{n+\frac{1}{2}}^\diamond - \mathbf{W}_n^\diamond) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Où on utilise le complément de Schur primal \mathbf{S}_p (voir (1.2.8)) et le second membre condensé \mathbf{b}_p (voir (1.2.9)).

Sous forme matricielle globale on obtient :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S}_p^\diamond & -\mathbf{M}^\diamond \\ \mathbf{k}_-^\diamond & \mathbf{I}^\diamond \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{n+\frac{1}{2}}^\diamond \\ \mathbf{T}_{n+\frac{1}{2}}^\diamond \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_p^\diamond \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{k}_-^\diamond & \mathbf{I}^\diamond \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_n^\diamond \\ \mathbf{T}_n^\diamond \end{pmatrix} \quad (2.2.15)$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W}_{n+\frac{1}{2}}^\diamond \\ \mathbf{T}_{n+\frac{1}{2}}^\diamond \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_p^\diamond & -\mathbf{M}^\diamond \\ \mathbf{k}_-^\diamond & \mathbf{I}^\diamond \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{k}_-^\diamond & \mathbf{I}^\diamond \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_n^\diamond \\ \mathbf{T}_n^\diamond \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{S}_p^\diamond & -\mathbf{M}^\diamond \\ \mathbf{k}_-^\diamond & \mathbf{I}^\diamond \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_p^\diamond \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.16)$$

2.2.3.2 Etape d'interfaces

Dans le cas d'un comportement parfait, l'étape d'interface consiste à assurer la continuité des déplacements de part et d'autre de l'interface, l'équilibre des interefforts sous la condition de la direction de recherche. Sous forme discrète, cet ensemble s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^\diamond \mathbf{W}_{n+1}^\diamond &= 0 \\ \mathbf{B}^\diamond \mathbf{T}_{n+1}^\diamond &= 0 \\ (\mathbf{T}_{n+\frac{1}{2}}^\diamond - \mathbf{T}_{n+1}^\diamond) + \mathbf{k}_+^\diamond (\mathbf{W}_{n+\frac{1}{2}}^\diamond - \mathbf{W}_{n+1}^\diamond) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Les deux premières équations impliquent (voir (1.1.19c)) :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{n+1}^\diamond &= \mathbf{A}^{\diamond T} \mathbf{W}_{n+1} \\ \mathbf{T}_{n+1}^\diamond &= \mathbf{B}^{\diamond T} \mathbf{T}_{n+1} \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Il est alors possible de réécrire l'équation de direction de recherche comme suit :

$$(\mathbf{T}_{n+\frac{1}{2}}^\diamond - \mathbf{B}^{\diamond T} \mathbf{T}_{n+1}^\diamond) + \mathbf{k}_+^\diamond (\mathbf{W}_{n+\frac{1}{2}}^\diamond - \mathbf{A}^{\diamond T} \mathbf{W}_{n+1}^\diamond) = 0 \quad (2.2.19)$$

Sous forme matricielle par blocs on obtient :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{k}_+^\diamond \mathbf{A}^{\diamond T} & \mathbf{B}^{\diamond T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{n+1} \\ \mathbf{T}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_+^\diamond & \mathbf{I}^\diamond \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{n+\frac{1}{2}}^\diamond \\ \mathbf{T}_{n+\frac{1}{2}}^\diamond \end{pmatrix} \quad (2.2.20)$$

Et au final, en exploitant l'orthogonalité des opérateurs d'assemblages (1.1.19a) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W}_{n+1} \\ \mathbf{T}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^\diamond \mathbf{k}_+^{\diamond -1} \\ \mathbf{B}^\diamond \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{k}_+^\diamond & \mathbf{I}^\diamond \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{n+\frac{1}{2}}^\diamond \\ \mathbf{T}_{n+\frac{1}{2}}^\diamond \end{pmatrix} \quad (2.2.21)$$

2.2.3.3 Itération complète

On dispose désormais des expressions des étapes de la méthode sous la forme algébrique :

$$\begin{aligned} \text{Etape de sous-domaines :} \quad & \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{n+\frac{1}{2}}^\diamond \\ \mathbf{T}_{n+\frac{1}{2}}^\diamond \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{SsD} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_n^\diamond \\ \mathbf{T}_n^\diamond \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{SsD} \end{pmatrix} \\ \text{Etape d'interfaces :} \quad & \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{n+1} \\ \mathbf{T}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Int} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{n+\frac{1}{2}}^\diamond \\ \mathbf{T}_{n+\frac{1}{2}}^\diamond \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

On rappelle les équations de réorganisation des degrés de liberté par interface :

$$\begin{aligned} \text{Opérateurs d'assemblages :} \quad & \mathbf{W}_n^\diamond = \mathbf{A}^{\diamond T} \mathbf{W}_n \\ & \mathbf{T}_n^\diamond = \mathbf{B}^{\diamond T} \mathbf{T}_n \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

On choisit alors d'initialiser la méthode par des quantités définies sur les interfaces \mathbf{W}_0^\diamond et \mathbf{T}_0^\diamond . Ces quantités vérifient les équations de l'étape d'interfaces ainsi :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W}_0^\diamond \\ \mathbf{T}_0^\diamond \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{\diamond T} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^{\diamond T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_0 \\ \mathbf{T}_0 \end{pmatrix} \quad (2.2.24)$$

La résolution commence donc par une étape de sous-domaines :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W}_{\frac{1}{2}}^\diamond \\ \mathbf{T}_{\frac{1}{2}}^\diamond \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{SsD} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{\diamond T} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^{\diamond T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_0 \\ \mathbf{T}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{SsD} \end{pmatrix} \quad (2.2.25)$$

Et se poursuit par une étape locale qui s'écrit, en substituant avec le résultat précédent :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{T}_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Int} \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{SsD} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{\diamond T} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^{\diamond T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_0 \\ \mathbf{T}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{SsD} \end{pmatrix} \right] \quad (2.2.26)$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{T}_1 \end{pmatrix} = \left[\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Int} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{SSD} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{\diamond T} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^{\diamond T} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{W}_0 \\ \mathbf{T}_0 \end{pmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Int} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{SSD} \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Où :} \quad \begin{cases} \mathbf{K}_{Int} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{\diamond} \mathbf{k}_+^{\diamond -1} \\ \mathbf{B}^{\diamond} \end{pmatrix} (\mathbf{k}_+^{\diamond} \quad \mathbf{I}^{\diamond}) \\ \mathbf{K}_{SSD} &= \begin{pmatrix} \mathbf{S}_p^{\diamond} & -\mathbf{M}^{\diamond} \\ \mathbf{k}_-^{\diamond} & \mathbf{I}^{\diamond} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{k}_-^{\diamond} & \mathbf{I}^{\diamond} \end{pmatrix} \\ \mathbf{b}_{SSD} &= \begin{pmatrix} \mathbf{S}_p^{\diamond} & -\mathbf{M}^{\diamond} \\ \mathbf{k}_-^{\diamond} & \mathbf{I}^{\diamond} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_p^{\diamond} \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.2.27)$$

Sous la forme ainsi obtenue, le lien entre la méthode proposée avec son solveur itératif de type LaTIn et un problème condensé classique résolu par un solveur itératif est manifeste.

Remarque sur la mise en œuvre : Caché sous une présentation des équations en interface par interface, le traitement des points multiples ne nécessite pas de précaution particulière. La formulation de la méthode par paire de sous-domaines permet de gérer naturellement la multiplicité : chaque coin d'un sous-domaine donné n'appartient qu'à deux interfaces au maximum. Pour le post-traitement ou l'exploitation des interefforts au voisinage de ces points multiples en dehors de l'algorithme de résolution, il est cependant préconisé, pour éviter tout problème de définition, de s'intéresser à une reconstruction sur la base des contraintes issues des sous-domaines.

2.2.3.4 Variations introduites pour une interface de comportement élastique

Dans le cas des interfaces élastiques les relations de continuité des déplacements et d'équilibre des interefforts sont remplacées par un lien de proportionnalité entre le saut de déplacement $[\mathbf{W}] = \mathbf{B}^{\diamond} \mathbf{W}^{\diamond}$ et l'intereffort résultant. L'équation de direction de recherche s'écrit de la même façon. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{n+1}^{\diamond} &= \mathbf{B}^{\diamond T} \mathbf{K} \mathbf{B}^{\diamond} \mathbf{W}_{n+1}^{\diamond} \\ (\mathbf{T}_{n+\frac{1}{2}}^{\diamond} - \mathbf{T}_{n+1}^{\diamond}) + \mathbf{k}_+^{\diamond} (\mathbf{W}_{n+\frac{1}{2}}^{\diamond} - \mathbf{W}_{n+1}^{\diamond}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

Sous forme matricielle par blocs, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}^{\diamond T} \mathbf{K} \mathbf{B}^{\diamond} & -\mathbf{I}^{\diamond} \\ \mathbf{k}_+^{\diamond} & \mathbf{I}^{\diamond} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{n+1}^{\diamond} \\ \mathbf{T}_{n+1}^{\diamond} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{k}_+^{\diamond} & \mathbf{I}^{\diamond} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{n+\frac{1}{2}}^{\diamond} \\ \mathbf{T}_{n+\frac{1}{2}}^{\diamond} \end{pmatrix} \quad (2.2.29)$$

Finalement :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W}_{n+1}^{\diamond} \\ \mathbf{T}_{n+1}^{\diamond} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{\diamond T} \mathbf{K} \mathbf{B}^{\diamond} & -\mathbf{I}^{\diamond} \\ \mathbf{k}_+^{\diamond} & \mathbf{I}^{\diamond} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{k}_+^{\diamond} & \mathbf{I}^{\diamond} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{n+\frac{1}{2}}^{\diamond} \\ \mathbf{T}_{n+\frac{1}{2}}^{\diamond} \end{pmatrix} \quad (2.2.30)$$

On choisit également d'initialiser la méthode par des quantités définies sur les interfaces \mathbf{W}_0^{\diamond} et \mathbf{T}_0^{\diamond} . L'aspect non parfait des interfaces permet, par exemple, d'initialiser avec un jeu. Pour la suite, on procède dans le même ordre que pour le cas des interfaces parfaites : une étape de sous-domaines puis une étape d'interfaces emboîtées par substitution.

L'expression générique de l'itération est inchangée, seule \mathbf{K}_{Int} est modifiée :

$$\mathbf{K}_{Int} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{\diamond T} \mathbf{K} \mathbf{B}^{\diamond} & -\mathbf{I}^{\diamond} \\ \mathbf{k}_+^{\diamond} & \mathbf{I}^{\diamond} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{k}_+^{\diamond} & \mathbf{I}^{\diamond} \end{pmatrix} \quad (2.2.31)$$

2.3 Ajout d'une deuxième échelle pour l'extensibilité

Telle que décrite jusqu'ici, la méthode est sensible à une augmentation du nombre de sous-domaines. Dans ce paragraphe, on se propose d'ajouter un problème grossier, ou problème macroscopique avec pour objectif de conférer de bonnes propriétés d'extensibilité à la méthode.

2.3.1 Principe général

L'approche adoptée consiste à enrichir les équations sur les sous-domaines par un problème global sur les interfaces dont le but est de transmettre à toute la structure les informations à grandes longueurs d'onde. Ces informations grossières sont qualifiées de macroscopiques, par opposition aux grandeurs microscopiques. Ces dernières, beaucoup plus riches, contiennent le reste de l'information au niveau local.

L'approche classique, rappelée en 1.3.4.3, consiste à affaiblir la direction de recherche pour permettre de satisfaire un équilibre macroscopique.

On propose ici une réécriture de ce principe à l'aide d'un changement de bases tel qu'il peut être employé dans [Klawonn et Rheinbach, 2005] pour la définition de degrés de libertés primaux complexes dans FETI-DP. L'objectif est, d'une part, d'offrir une nouvelle lecture de la méthode classique. D'autre part, il s'agit de voir dans quelle mesure il est possible d'imposer directement le comportement macroscopique de l'interface qui est connu dans le cas parfait (continuité des déplacements), en se passant de la direction de recherche macroscopique.

2.3.2 Ecriture sur-condensée du problème macroscopique

Cette approche est similaire à ce qui est fait habituellement dans la méthode LaTIn dans le sens où elle consiste à introduire des bases pour les espaces macroscopiques à la fois des quantités de déplacement et d'effort.

Dans cette partie, l'indice $_b$ est omis car on ne travaille plus que sur l'interface. On considère deux sous-structures adjacentes s et r .

Dans le cas des interfaces à comportement parfait, les quantités d'interfaces doivent vérifier :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Equilibre des efforts macroscopiques :} \\ \text{Continuité des déplacements macroscopiques :} \end{array} \right. \begin{array}{l} \underline{\mathbf{T}}_M^s + \underline{\mathbf{T}}_M^r = 0 \\ \underline{\mathbf{W}}_M^s = \underline{\mathbf{W}}_M^r \end{array} \quad (2.3.1)$$

Après discrétisation, on introduit les matrices de changement de base \mathbf{B}_M^T et \mathbf{B}_m^T pour les efforts et \mathbf{B}_M^W et \mathbf{B}_m^W pour les déplacements de sorte à ce qu'on puisse écrire :

$$\mathbf{T} = (\mathbf{B}_M^T \quad \mathbf{B}_m^T) \begin{pmatrix} \mathbf{T}_M \\ \mathbf{T}_m \end{pmatrix} \quad \mathbf{W} = (\mathbf{B}_M^W \quad \mathbf{B}_m^W) \begin{pmatrix} \mathbf{W}_M \\ \mathbf{W}_m \end{pmatrix} \quad (2.3.2)$$

Les quantités dans les nouvelles bases seront notées $\tilde{\mathbf{x}}$, et un changement de base pourra être écrit de manière condensée :

$$\mathbf{x} = (\mathbf{B}_M^{\mathbf{x}} \quad \mathbf{B}_m^{\mathbf{x}}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_M \\ \mathbf{x}_m \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}} \quad (2.3.3)$$

De ce changement de base sur les interfaces, on peut déduire un changement de base au niveau des sous-structures :

$$\mathbf{W} = \mathbf{N}\mathbf{u}$$

$$(\mathbf{B}_M^W \quad \mathbf{B}_m^W) \begin{pmatrix} \mathbf{W}_M \\ \mathbf{W}_m \end{pmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{u} \quad (2.3.4)$$

$$(\mathbf{B}_M^W \quad \mathbf{B}_m^W) \begin{pmatrix} \mathbf{W}_M \\ \mathbf{W}_m \end{pmatrix} = \mathbf{N} (\mathbf{B}_M^u \quad \mathbf{B}_m^u) \begin{pmatrix} \mathbf{u}_M \\ \mathbf{u}_m \end{pmatrix}$$

Les matrices \mathbf{B}_M^u et \mathbf{B}_m^u sont choisies telles que : $\mathbf{N}\mathbf{B}_M^u = \mathbf{B}_M^W \cdot \mathbf{1}_M$. On a donc :

$$\mathbf{B}^{W^{-1}} \mathbf{N} \mathbf{B}^u = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_M & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_m \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{N}} \quad (2.3.5)$$

Remarque : La matrice \mathbf{N} de passage bord / interface peut être rectangulaire puisque qu'aucune contrainte n'est a priori imposée sur la correspondance des nœuds des sous-domaines avec ceux de l'interface.

L'écriture du problème discret commence par introduire un changement de base des équations déjà rencontrées dans les paragraphes précédents. Le problème macroscopique est formulé et résolu à l'étape de sous-domaines. On part du système (2.2.14) et on l'écrit dans les nouvelles bases :

$$\begin{cases} \mathbf{S}_p \mathbf{B}^u \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{b}_p + \mathbf{N}^T \mathbf{M} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{T}} \\ \mathbf{M} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{T}} + \mathbf{k} \mathbf{B}^W \tilde{\mathbf{W}} = \tilde{\mathbf{T}} \\ \tilde{\mathbf{W}} = \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{u}} \end{cases} \quad (2.3.6)$$

Avec $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{M} \mathbf{T}_{n-\frac{1}{2}} + \mathbf{k} \mathbf{W}_{n-\frac{1}{2}}$, où les quantités issue de la demi-itérations précédentes vérifient le groupe des équations constituant une étape d'interface.

En multipliant la première équation par \mathbf{B}^{uT} à gauche, on obtient :

$$(\mathbf{B}^{uT} \mathbf{S}_p \mathbf{B}^u) \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{B}^{uT} \mathbf{b}_p + \mathbf{B}^{uT} \mathbf{N}^T \mathbf{M} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{T}} \quad (2.3.7)$$

Or, $\mathbf{B}^{uT} \mathbf{N}^T = (\mathbf{N} \mathbf{B}^u)^T = (\mathbf{B}^W \tilde{\mathbf{N}})^T = \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{B}^{WT}$. Ainsi, en posant $\widetilde{\mathbf{b}}_p = \mathbf{B}^{uT} \mathbf{b}_p$:

$$(\mathbf{B}^{uT} \mathbf{S}_p \mathbf{B}^u) \tilde{\mathbf{u}} = \widetilde{\mathbf{b}}_p + \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{B}^{WT} \mathbf{M} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{T}} \quad (2.3.8)$$

Concernant la matrice de masse, d'une part le changement de base amène :

$$\mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{T} = (\mathbf{W}_M \quad \mathbf{W}_m) \begin{pmatrix} \mathbf{B}_M^{WT} \\ \mathbf{B}_m^{WT} \end{pmatrix} \mathbf{M} (\mathbf{B}_M^T \quad \mathbf{B}_m^T) \begin{pmatrix} \mathbf{T}_M \\ \mathbf{T}_m \end{pmatrix} \quad (2.3.9)$$

D'autre part, par propriété d'orthogonalité, on obtient :

$$\mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_M \\ \mathbf{W}_m \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{M}_M & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_M \\ \mathbf{T}_m \end{pmatrix} \quad (2.3.10)$$

Donc, en posant :

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_M^{WT} \\ \mathbf{B}_m^{WT} \end{pmatrix} \mathbf{M} (\mathbf{B}_M^T \quad \mathbf{B}_m^T) \quad (2.3.11)$$

l'hypothèse de séparation d'échelle équivaut à supposer $\widetilde{\mathbf{M}}$ bloc-diagonale. En multipliant la deuxième équation du système (2.3.6) par \mathbf{B}^{WT} à gauche on obtient :

$$\widetilde{\mathbf{M}}\widetilde{\mathbf{T}} + \mathbf{B}^{WT}\mathbf{k}\mathbf{B}^W\widetilde{\mathbf{W}} = \mathbf{B}^{WT}\check{\mathbf{T}} \quad (2.3.12)$$

Au final, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{S}}_p\widetilde{\mathbf{u}} = \widetilde{\mathbf{b}}_p + \widetilde{\mathbf{N}}^T\widetilde{\mathbf{M}}\widetilde{\mathbf{T}} \\ \widetilde{\mathbf{M}}\widetilde{\mathbf{T}} + \widetilde{\mathbf{k}}\widetilde{\mathbf{W}} = \check{\mathbf{T}} \\ \widetilde{\mathbf{W}} = \widetilde{\mathbf{N}}\widetilde{\mathbf{u}} \end{cases} \quad (2.3.13)$$

Où :

$$\widetilde{\mathbf{S}}_p = \mathbf{B}^{uT}\mathbf{S}_p\mathbf{B}^u \quad \widetilde{\mathbf{k}} = \mathbf{B}^{WT}\mathbf{k}\mathbf{B}^W \quad \check{\mathbf{T}} = \mathbf{B}^{WT}\check{\mathbf{T}} \quad (2.3.14)$$

En choisissant alors des bases de sorte à ce que $\widetilde{\mathbf{k}}$ soit diagonale par bloc, il est possible d'écrire le système précédent de manière décomposée :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{pMM} & \mathbf{S}_{pMm} \\ \mathbf{S}_{pMm} & \mathbf{S}_{pmm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_M \\ \mathbf{u}_m \end{pmatrix} = \widetilde{\mathbf{b}}_p + \begin{pmatrix} \mathbf{M}_M & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_m^T\mathbf{M}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_M \\ \mathbf{T}_m \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{M}_M & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_M \\ \mathbf{T}_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{k}_M & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_M \\ \mathbf{W}_m \end{pmatrix} = \check{\mathbf{T}} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{W}_M \\ \mathbf{W}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_M & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_M \\ \mathbf{u}_m \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.3.15)$$

Dans la suite, on qualifie de macroscopique, ou macro les lignes des systèmes ci-dessus faisant intervenir les parties macro des déplacements et efforts d'interface. De même, on désignera par microscopique, ou micro, celles qui font intervenir les parties micro de ces mêmes quantités.

On dispose par ailleurs des équations macroscopiques d'interfaces :

$$\begin{cases} \mathbf{T}_M^s + \mathbf{T}_M^r = 0 \\ \mathbf{W}_M^s = \mathbf{W}_M^r \end{cases} \quad (2.3.16)$$

La surcondensation macro consiste alors à utiliser la direction de recherche micro pour éliminer les degrés de liberté micro de l'équilibre interne. Etant donné que les espaces macro sont choisis contenant les mouvements de solides rigides et qu'il y a augmentation par la direction de recherche, il n'y a pas de doute sur l'inversibilité du problème micro. L'approche se base sur la partie micro de l'équation de trace qui est injectée dans l'équation de direction de recherche micro. La relation obtenue permet de substituer $\mathbf{M}_m\mathbf{T}_m$ dans la partie micro de l'équilibre par une expression qui dépend de \mathbf{u}_m . On obtient :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{pMM} & \mathbf{S}_{pMm} \\ \mathbf{S}_{pMm} & \mathbf{S}_{pmm} + \mathbf{N}_m^T\mathbf{k}_m\mathbf{N}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_M \\ \mathbf{u}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{pM} \\ \mathbf{b}_{pM} + \mathbf{N}_m^T\check{\mathbf{T}}_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{M}_M\mathbf{T}_M \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{M}_M\mathbf{T}_M + \mathbf{k}_M\mathbf{W}_M = \check{\mathbf{T}}_M \\ \mathbf{W}_M = \mathbf{u}_M \end{cases} \quad (2.3.17)$$

On élimine alors les degrés de liberté micro en travaillant sur la partie micro de l'équilibre et en remplaçant \mathbf{u}_M par \mathbf{W}_M :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{pMm}\mathbf{W}_M + (\mathbf{S}_{pmm} + \mathbf{N}_m^T\mathbf{k}_m\mathbf{N}_m)\mathbf{u}_m &= \mathbf{b}_{pM} + \mathbf{N}_m^T\check{\mathbf{T}}_m \\ \mathbf{u}_m &= (\mathbf{S}_{pmm} + \mathbf{N}_m^T\mathbf{k}_m\mathbf{N}_m)^{-1} (\mathbf{b}_{pM} + \mathbf{N}_m^T\check{\mathbf{T}}_m - \mathbf{S}_{pMm}\mathbf{W}_M) \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

La partie macro de l'équilibre devient alors :

$$\mathbf{S}_{pMM} \mathbf{W}_M + \mathbf{S}_{pmm} (\mathbf{S}_{pmm} + \mathbf{N}_m^T \mathbf{k}_m \mathbf{N}_m)^{-1} (\mathbf{b}_{pm} + \mathbf{N}_m^T \check{\mathbf{T}}_m - \mathbf{S}_{pmm} \mathbf{W}_M) = \mathbf{b}_{pM} + \mathbf{M}_M \mathbf{T}_M \quad (2.3.19)$$

D'où le nouveau système :

$$\begin{cases} \mathcal{S} \mathbf{W}_M &= \check{\mathbf{b}}_{pM} + \mathbf{M}_M \mathbf{T}_M \\ \mathbf{M}_M \mathbf{T}_M + \mathbf{k}_M \mathbf{W}_M &= \check{\mathbf{T}}_M \end{cases} \quad (2.3.20)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \mathbf{S}_{pMM} - \mathbf{S}_{pmm} (\mathbf{S}_{pmm} + \mathbf{N}_m^T \mathbf{k}_m \mathbf{N}_m)^{-1} \mathbf{S}_{pmm} \\ \check{\mathbf{b}}_{pM} &= \mathbf{b}_{pM} - \mathbf{S}_{pmm} (\mathbf{S}_{pmm} + \mathbf{N}_m^T \mathbf{k}_m \mathbf{N}_m)^{-1} (\mathbf{b}_{pm} + \mathbf{N}_m^T \check{\mathbf{T}}_m) \end{aligned}$$

Le système macro complet pour une interface Γ^{rs} s'écrit donc :

$$\begin{cases} \mathcal{S}^s \mathbf{W}_M^s &= \mathbf{b}_{pM}^s + \mathbf{M}_M \mathbf{T}_M^s \\ \mathcal{S}^r \mathbf{W}_M^r &= \mathbf{b}_{pM}^r + \mathbf{M}_M \mathbf{T}_M^r \\ \mathbf{T}_M^s + \mathbf{T}_M^r &= 0 \\ \mathbf{W}_M^s &= \mathbf{W}_M^r \end{cases} \quad (2.3.21)$$

Ce système est fermé sans besoin d'introduire les directions de recherche macro.

2.3.3 Résolution du problème macroscopique

Deux approches de résolution sont envisageables. La première présente l'avantage d'être simple et de ne pas utiliser de direction de recherche macroscopique, elle n'est cependant applicable qu'au cas des interfaces parfaites. La seconde, plus générique, est plus proche de la résolution habituelle.

Résolution 1 : Ce type de résolution n'est applicable qu'au cas des interfaces parfaites. On fait la somme des deux premières équations de (2.3.21) en prenant en compte l'égalité des déplacements :

$$(\mathcal{S}^s + \mathcal{S}^r) \mathbf{W}_M = \mathbf{b}_{pM}^s + \mathbf{b}_{pM}^r \quad (2.3.22)$$

Le système à résoudre est simple et ne nécessite pas de multiplicateurs de Lagrange ou de méthodes plus élaborées que de l'inversion de matrice ou de l'itératif.

Résolution 2 : Ce type de résolution, version discrète de 1.3.4.3, est applicable à tous les types d'interface. On l'applique ici à l'exemple de l'interface parfaite. Le système macro en effort s'écrit :

$$\begin{cases} \mathcal{S}^s \mathbf{W}_M^s &= \mathbf{b}_{pM}^s + \mathbf{M}_M \mathbf{T}_M^s \\ \mathcal{S}^r \mathbf{W}_M^r &= \mathbf{b}_{pM}^r + \mathbf{M}_M \mathbf{T}_M^r \\ \mathbf{T}_M^s + \mathbf{T}_M^r &= 0 \end{cases} \quad (2.3.23)$$

Ce système n'est pas fermé mais avec les directions de recherche macro il serait surdéterminé. En effet, les directions de recherche s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_M \mathbf{T}_M^s + \mathbf{k}_M \mathbf{W}_M^s &= \check{\mathbf{T}}_M^s \\ \mathbf{M}_M \mathbf{T}_M^r + \mathbf{k}_M \mathbf{W}_M^r &= \check{\mathbf{T}}_M^r \end{cases}, \quad (2.3.24)$$

ce qui donne au total un système à cinq équations pour quatre inconnues $(\mathbf{W}_M^s, \mathbf{T}_M^s, \mathbf{W}_M^r, \mathbf{T}_M^r)$.

La direction de recherche macro est donc imposée sous contraintes. Pour cela, on minimise le potentiel de direction de recherche sous la contrainte d'équilibre macro. On introduit alors le multiplicateur macro $\tilde{\mathbf{W}}_M$ dans le lagrangien suivant :

$$\begin{aligned} L(\mathbf{T}_M^s, \mathbf{T}_M^r, \tilde{\mathbf{W}}_M) &= I^s(\mathbf{T}_M^s) + I^r(\mathbf{T}_M^r) + (\mathbf{T}_M^s + \mathbf{T}_M^r)^T \mathbf{M}_M^T \tilde{\mathbf{W}}_M \\ I^s(\mathbf{T}_M^s) &= \frac{1}{2} \mathbf{T}_M^{sT} \mathbf{M}_M^T \mathbf{k}_M^s{}^{-1} \mathbf{M}_M \mathbf{T}_M^s + \mathbf{T}_M^{sT} \mathbf{M}_M^T \mathbf{W}_M^s - \mathbf{T}_M^{sT} \mathbf{M}_M^T \mathbf{k}_M^s{}^{-1} \check{\mathbf{T}}_M^s \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

Le système complet s'écrit en conséquence :

$$\begin{cases} (1) & \mathcal{S}^s \mathbf{W}_M^s = \mathbf{b}_{pM}^s + \mathbf{M}_M \mathbf{T}_M^s \\ (2) & \mathcal{S}^r \mathbf{W}_M^r = \mathbf{b}_{pM}^r + \mathbf{M}_M \mathbf{T}_M^r \\ (3) & \mathbf{M}_M \mathbf{T}_M^s + \mathbf{k}_M^s (\mathbf{W}_M^s + \tilde{\mathbf{W}}_M) = \check{\mathbf{T}}_M^s \\ (4) & \mathbf{M}_M \mathbf{T}_M^r + \mathbf{k}_M^r (\mathbf{W}_M^r + \tilde{\mathbf{W}}_M) = \check{\mathbf{T}}_M^r \\ (5) & \mathbf{T}_M^s + \mathbf{T}_M^r = 0 \end{cases} \quad (2.3.26)$$

Puis on fait :

— (3) dans (1) :

$$\mathcal{S}^s \mathbf{W}_M^s = \mathbf{b}_{pM}^s + [\check{\mathbf{T}}_M^s - \mathbf{k}_M^s (\mathbf{W}_M^s + \tilde{\mathbf{W}}_M)] \quad (2.3.27)$$

$$(\mathcal{S}^s + \mathbf{k}_M^s) \mathbf{W}_M^s = \mathbf{b}_{pM}^s + \check{\mathbf{T}}_M^s + \mathbf{k}_M^s \tilde{\mathbf{W}}_M$$

— (4) dans (2) :

$$\mathcal{S}^r \mathbf{W}_M^r = \mathbf{b}_{pM}^r + [\check{\mathbf{T}}_M^r - \mathbf{k}_M^r (\mathbf{W}_M^r + \tilde{\mathbf{W}}_M)] \quad (2.3.28)$$

$$(\mathcal{S}^r + \mathbf{k}_M^r) \mathbf{W}_M^r = \mathbf{b}_{pM}^r + \check{\mathbf{T}}_M^r + \mathbf{k}_M^r \tilde{\mathbf{W}}_M$$

et

— (5) dans (3)+(4) :

$$\underbrace{\mathbf{M}_M (\mathbf{T}_M^s + \mathbf{T}_M^r)}_{= 0 \text{ (5)}} + \mathbf{k}_M^s (\mathbf{W}_M^s + \tilde{\mathbf{W}}_M) + \mathbf{k}_M^r (\mathbf{W}_M^r + \tilde{\mathbf{W}}_M) = \check{\mathbf{T}}_M^s + \check{\mathbf{T}}_M^r \quad (2.3.29)$$

et on obtient :

$$\begin{cases} (\mathcal{S}^s + \mathbf{k}_M^s) \mathbf{W}_M^s = \check{\mathbf{b}}_{pM}^s + \mathbf{k}_M^s \tilde{\mathbf{W}}_M \\ (\mathcal{S}^r + \mathbf{k}_M^r) \mathbf{W}_M^r = \check{\mathbf{b}}_{pM}^r + \mathbf{k}_M^r \tilde{\mathbf{W}}_M \\ \mathbf{k}_M^s (\mathbf{W}_M^s + \tilde{\mathbf{W}}_M) + \mathbf{k}_M^r (\mathbf{W}_M^r + \tilde{\mathbf{W}}_M) = \check{\mathbf{T}}_M^s + \check{\mathbf{T}}_M^r \end{cases} \quad (2.3.30)$$

D'où :

$$\begin{cases} \mathbf{W}_M^s = (\mathcal{S}^s + \mathbf{k}_M^s)^{-1} (\check{\mathbf{b}}_{pM}^s + \mathbf{k}_M^s \tilde{\mathbf{W}}_M) \\ \mathbf{W}_M^r = (\mathcal{S}^r + \mathbf{k}_M^r)^{-1} (\check{\mathbf{b}}_{pM}^r + \mathbf{k}_M^r \tilde{\mathbf{W}}_M) \\ \mathbf{k}_M^s (\mathbf{W}_M^s + \tilde{\mathbf{W}}_M) + \mathbf{k}_M^r (\mathbf{W}_M^r + \tilde{\mathbf{W}}_M) = \check{\mathbf{T}}_M^s + \check{\mathbf{T}}_M^r \end{cases} \quad (2.3.31)$$

Puis :

$$\begin{aligned} & \mathbf{k}_M^s (\mathcal{S}^s + \mathbf{k}_M^s)^{-1} (\check{\mathbf{b}}_{pM}^s + \mathbf{k}_M^s \tilde{\mathbf{W}}_M + \tilde{\mathbf{W}}_M) \\ & + \mathbf{k}_M^r (\mathcal{S}^r + \mathbf{k}_M^r)^{-1} (\check{\mathbf{b}}_{pM}^r + \mathbf{k}_M^r \tilde{\mathbf{W}}_M + \tilde{\mathbf{W}}_M) \\ & = \check{\mathbf{T}}_M^s + \check{\mathbf{T}}_M^r \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

En définitif, on a le problème homogénéisé suivant :

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{k}_M^s + \mathbf{k}_M^s (\mathcal{S}^s + \mathbf{k}_M^s)^{-1} \mathbf{k}_M^s + \mathbf{k}_M^r + \mathbf{k}_M^r (\mathcal{S}^r + \mathbf{k}_M^r)^{-1} \mathbf{k}_M^r \right] \tilde{\mathbf{W}}_M \\ & = \\ & \check{\mathbf{T}}_M^s - \mathbf{k}_M^s (\mathcal{S}^s + \mathbf{k}_M^s)^{-1} \check{\mathbf{b}}_{pM}^s + \check{\mathbf{T}}_M^r - \mathbf{k}_M^r (\mathcal{S}^r + \mathbf{k}_M^r)^{-1} \check{\mathbf{b}}_{pM}^r \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

Ces deux types de résolutions de sont pas équivalents. En effet, la continuité des déplacements est affaiblie dans le cas de la deuxième méthode et n'est vérifiée qu'à convergence.

Remarque : Le problème résolu (2.3.26) ne fait pas intervenir la relation de continuité des déplacements macro d'interface. On peut montrer qu'il est possible de formuler le problème macroscopique en n'introduisant qu'une seule base macro pour les déplacements d'interface, en se passant de celle des interefforts. Pour être fermé, le problème ainsi écrit doit comprendre les parties micro et macro des équations de direction de recherche. Souvent hérités des choix faits pour les déplacements, les projecteurs pour les efforts ne sont alors plus à définir. Seul le travail des déplacements macro dans les efforts est à spécifier.

2.4 Traitement des interfaces de contact

Le traitement des interfaces de contact comporte quelques spécificités dues notamment à la non-localité introduite par la dualité choisie. Après avoir formulé le problème au niveau continu, en utilisant le représentant \underline{T} de l'intereffort introduit au début du chapitre, on traitera de sa résolution au niveau discret.

2.4.1 Formulation du problème de contact dans le cadre de la méthode développée

Afin de formuler le problème de contact avec le représentant \underline{T} de l'intereffort, on repart de la formulation forte des équations continues écrites avec un intereffort traditionnel. Pour une interface de contact entre un sous-domaine Ω^1 et un sous-domaine Ω^2 , le problème en \underline{T} s'écrit :

$$\begin{array}{ll} (\underline{W}^r - \underline{W}^s) \cdot \underline{n}^i + \underline{g} & \geq 0 & \text{Condition de non-pénétration} \\ \underline{T}^i \cdot \underline{n}^i = \underline{T}_n^i & \geq 0 & \text{Effort normaux uniquement en compression} \\ (\underline{W}_n^r - \underline{W}_n^s + \underline{g}) \cdot \underline{T}_n^i & = 0 & \text{Condition de complémentarité} \\ \underline{T}^r + \underline{T}^s & = 0 & \text{Equilibre des efforts} \end{array}$$

Avec \underline{n} , la normale à l'interface, \underline{g} un représentant du jeu entre les deux pièces en contact, $i \in \{r, s\}$ et la notation $\underline{v} \geq 0$ désignant que toutes les composantes du vecteurs \underline{v} sont positives où nulles. Résolues au niveau discret, ces équations sont vérifiées au sens faible. On profite de leur formulation sous forme variationnelle pour introduire le représentant \underline{T} . Dans les lignes qui suivent, les équations sont reprises une par une.

■ **Condition de non-pénétration :** Ne portant que sur des quantités cinématiques, la formulation continue de cette équation reste inchangée.

■ **Condition sur les efforts normaux uniquement en compression :** La formulation du problème unilatéral de contact impose que les efforts normaux soient nuls en traction (les sous-structures ne sont pas collées). En la passant sous forme faible il vient :

$$\forall \underline{W}^* \in H^{1/2}(\Gamma^i) \text{ tel que } \underline{W}^* \geq 0 \quad \langle \underline{T}_n^i ; \underline{W}_n^* \rangle_{H^{1/2}} \geq 0 \quad (2.4.1)$$

Pour une discrétisation linéaire (fonction positive), on arrive à la forme discrétisée suivante :

$$\mathbf{W}_n^{*T} \mathbf{M}_{H^{1/2}} \mathbf{T}_n^i \geq 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{W}_n^* \geq 0 \quad (2.4.2)$$

pour aboutir à la condition qui sera retenue :

$$\mathbf{M}_{H^{1/2}} \mathbf{T}_n^i \geq 0 \quad (2.4.3)$$

■ **Condition de complémentarité :** Cette condition traduit l'exclusivité des statuts "en contact" et "ouvert". En un point donné, nécessairement :

- Soit il y a contact, auquel cas le jeu a été rattrapé et les deux bords des sous-domaines son confondus :

$$\underline{W}_n^r - \underline{W}_n^s + \underline{g} = 0 \quad (2.4.4)$$

- Soit les deux surfaces ne sont pas en contact et l'effort normal ne transite pas :

$$\underline{T}_n^i = 0 \quad (2.4.5)$$

La condition de complémentarité peut être écrite de façon équivalente sous forme intégrale sur l'interface :

$$\int_{\Gamma} (\underline{W}_n^r - \underline{W}_n^s + \underline{g}) \cdot \underline{T}_n^i \, d\Gamma = 0 \quad (2.4.6)$$

En appliquant le théorème de représentation de Riesz, il vient :

$$\langle \underline{W}_n^r - \underline{W}_n^s + \underline{g} ; \underline{T}_n^i \rangle_{H^{1/2}} = 0 \quad (2.4.7)$$

et la condition retenue s'écrit :

$$(\mathbf{W}_n^r - \mathbf{W}_n^s + \mathbf{g}) \mathbf{M}_{H^{1/2}} \mathbf{T}_n^i = 0 \quad (2.4.8)$$

■ **Condition d'équilibre des efforts :** En passant cette condition d'équilibre sous forme faible puis en introduisant le représentant \underline{T} de l'intereffort, on retombe sur la formulation directe en \underline{T} obtenue pour le cas des interfaces parfaites :

$$\forall \underline{W}^* \in H^{1/2}(\Gamma^i), \quad \int_{\Gamma} \underline{W}^* \cdot (\underline{T}^r + \underline{T}^s) \, d\Gamma = \langle \underline{W}^* ; \underline{T}^r + \underline{T}^s \rangle_{H^{1/2}} = 0 \quad (2.4.9)$$

ce qui mène à la formulation discrète :

$$\mathbf{T}^r + \mathbf{T}^s = 0 \quad (2.4.10)$$

Pour obtenir le problème complet d'interface, on ajoute à ces équations la direction de recherche réécrite sur les \mathbf{T} .

$$(\mathbf{T}^i - \mathbf{T}_{SD}^i) - \mathbf{k}_+^i (\mathbf{W}^i - \mathbf{W}_{SD}^i) = 0 \quad (2.4.11)$$

où \mathbf{T}_{SsD} et \mathbf{W}_{SsD} sont les quantités issues de l'étape de sous-domaines.
 Au final, le problème de contact à résoudre est le suivant :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W}_n^r - \mathbf{W}_n^s + \mathbf{g} &\geq 0 \\
 \mathbf{M}_{H^{1/2}} \mathbf{T}_n^i &\geq 0 \\
 (\mathbf{W}_n^r - \mathbf{W}_n^s + \mathbf{g}) \mathbf{M}_{H^{1/2}} \mathbf{T}_n^i &= 0 \\
 \mathbf{T}^r + \mathbf{T}^s &= 0 \\
 (\mathbf{T}^i - \mathbf{T}_{SsD}^i) - \mathbf{k}_+^i (\mathbf{W}^i - \mathbf{W}_{SsD}^i) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Cette formulation discrète du problème de contact, adaptée au cadre de la méthode proposée, fait apparaître les liens entre chaque point de l'interface introduits par la dualité proposée. La matrice de masse, pleine, présente dans l'équation de positivité des efforts normaux, impose de traiter le problème globalement sur l'interface. Cette contrainte n'est pas sans conséquence sur le choix de l'algorithme de résolution.

2.4.2 Résolution du problème discret

Dans l'impossibilité de résoudre le problème de contact nœud par nœud, la résolution passe par une formulation de type problème de complémentarité linéaire. Sous sa forme générique, un problème de complémentarité linéaire consiste à chercher un vecteur z de \mathbb{R}^n , pour une matrice \mathbb{M} de $\mathbb{R}^{n \times n}$ et un vecteur q de \mathbb{R}^n , solution de :

$$\begin{aligned}
 z &\geq 0 \\
 q + \mathbb{M}z &\geq 0 \\
 z^T (q + \mathbb{M}z) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

Ces problèmes sont rencontrés dans plusieurs domaines dont l'optimisation quadratique, les simulations d'apparition et disparition de phases dans les écoulements ou, pour la mécanique des solides, la modélisation du contact. La théorie mathématique autour de ces problèmes, les conditions d'existence d'une solution et les principaux algorithmes de résolution sont décrits en détail dans les ouvrages de référence [Cottle *et al.*, 2009] et [Murty, 2010].

Sous une forme plus spécifique à l'application visée, un problème de complémentarité linéaire peut être écrit en introduisant un vecteur w comme suit :

$$\begin{aligned}
 w &\geq 0 \quad , \quad z \geq 0 \\
 w &= q + \mathbb{M}z \\
 z^T w &= 0
 \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

Le problème de contact écrit dans le cadre du formalisme de la méthode proposée peut être reformulé de cette façon.

La première étape consiste à exprimer le déplacement d'interface inconnu par les directions de recherche :

$$\mathbf{W}^i = \mathbf{k}_+^{i-1} (\mathbf{T}^i - \mathbf{T}_{SsD}^i) + \mathbf{W}_{SsD}^i \tag{2.4.15}$$

L'écart de déplacement des deux côtés de l'interface s'écrit alors :

$$\mathbf{W}^r - \mathbf{W}^s = \mathbf{k}_+^{r-1} \mathbf{T}^r - \mathbf{k}_+^{s-1} \mathbf{T}^s + (\mathbf{k}_+^{r-1} \mathbf{T}_{SsD}^r - \mathbf{k}_+^{s-1} \mathbf{T}_{SsD}^s + \mathbf{W}_{SsD}^r - \mathbf{W}_{SsD}^s) \tag{2.4.16}$$

Puis en utilisant la relation d'équilibre $\mathbf{T}^r + \mathbf{T}^s = 0$ et en posant

$$q = \mathbf{k}_+^{r-1} \mathbf{T}_{SsD}^r - \mathbf{k}_+^{s-1} \mathbf{T}_{SsD}^s + \mathbf{W}_{SsD}^r - \mathbf{W}_{SsD}^s \tag{2.4.17}$$

on écrit le saut de déplacement comme suit :

$$\mathbf{W}^r - \mathbf{W}^s = (\mathbf{k}_+^{r-1} + \mathbf{k}_+^{s-1}) \mathbf{T}^r + q \quad (2.4.18)$$

En utilisant la relation d'équilibre, on obtient le système :

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{T} \geq 0 \quad , \quad \mathbf{W} \geq 0 \\ \mathbf{W} = \mathbf{M}\mathbf{T} + q \\ \mathbf{T}^T \mathbf{W} = 0 \end{array} \right. \quad \text{Avec :} \quad \begin{array}{l} \mathbf{T} = \mathbf{M}_{H^{1/2}} \mathbf{T}^r \\ \mathbf{W} = \mathbf{W}^r - \mathbf{W}^s \\ \mathbf{M} = (\mathbf{k}_+^{r-1} + \mathbf{k}_+^{s-1}) \mathbf{M}_{H^{1/2}}^{-1} \\ q = \mathbf{k}_+^{r-1} \mathbf{T}_{SsD}^r - \mathbf{k}_+^{s-1} \mathbf{T}_{SsD}^s + \mathbf{W}_{SsD}^r - \mathbf{W}_{SsD}^s \end{array} \quad (2.4.19)$$

2.4.2.1 Algorithme de résolution

Pour la résolution de ce problème de complémentarité linéaire, il est possible d'utiliser un algorithme de Lemke. Démontré robuste, il présente l'avantage de la simplicité et de performances adaptées aux tailles de problèmes visées. Au-delà de quelques centaines de degrés de liberté, des algorithmes itératifs seraient plus performants mais ce sera rarement le cas pour les problèmes de contact formulés uniquement sur les interfaces, en particulier pour les premières applications visées par ces travaux. Une variante connue de la résolution type Lemke consiste à augmenter le problème de complémentarité linéaire initial.

En reprenant la définition (2.4.13) on désigne un problème de complémentarité linéaire par le couple (q, M) . L'objectif de l'augmentation est de définir un problème noté (\tilde{q}, \tilde{M}) en ajoutant une variable et une contrainte, de sorte à ce que ce problème augmenté ait toujours une solution. La solution au problème original peut ensuite être déduite de celle du problème augmenté.

Sur la base du problème (q, M) , on introduit un scalaire $\lambda \geq 0$ et un vecteur $d > 0$ afin de poser le problème :

$$\tilde{q} = \begin{bmatrix} q \\ \lambda \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{M} = \begin{bmatrix} M & d \\ -d^T & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.20)$$

Résoudre ce système revient alors à trouver un vecteur z et un scalaire θ solutions de :

$$\begin{array}{lll} w = q + Mz + \theta \geq 0, & z \geq 0, & w^T z = 0, \\ \sigma = \lambda - d^T z \geq 0, & \theta \geq 0 & \sigma \cdot \theta = 0. \end{array} \quad (2.4.21)$$

Si (z, θ) est solution de (\tilde{q}, \tilde{M}) avec $\theta = 0$ alors z est solution de (q, M) . On remarquera que $\theta = 0$ est vrai si $\lambda > d^T z$. L'algorithme emploie des techniques de pivotage pour déterminer la solution au problème initial.

Les ingrédients théoriques étant réunis, la formulation discrète de la méthode introduisant un nouveau représentant de l'intereffort est posée. Afin de la mettre en œuvre, il est cependant nécessaire de savoir calculer la matrice de produit scalaire associée à la dualité choisie.

Avant d'illustrer les performances de la méthode dans le chapitre 4, le chapitre suivant détaille une proposition de calcul approché de cette matrice et sa validation.

Calcul du produit scalaire de $H^{1/2}$

Contents

3.1	Le produit scalaire de $H^{1/2}(\partial\Omega^s)$	58
3.1.1	Ecriture continue du produit scalaire	58
3.1.2	Propriétés	58
3.1.3	Approches existantes	59
3.2	Proposition de calcul approché	60
3.2.1	Formulation	60
3.2.2	Mise en œuvre numérique	62
3.3	Validation de l'approche proposée	63
3.3.1	Démarche	63
3.3.2	Calcul de référence	64
3.3.3	Résultats de la validation	68
3.4	Extension du calcul approché aux problèmes 3D	69

Afin de mettre en œuvre la méthode présentée au chapitre précédent, il est nécessaire de pouvoir calculer le produit scalaire choisi pour la dualité des quantités d'interface. Présenté ponctuellement dans les chapitres précédents, le produit scalaire de l'espace $H^{1/2}(\partial\Omega^s)$ est composé de deux termes :

- le produit scalaire de $L^2(\partial\Omega^s)$;
- un terme pseudo-singulier de double intégrale sur $\partial\Omega^s$.

Les matrices de masse (Cf. 2.2.2.1) issues de cette dualité sont pleines. Pour des interfaces de grandes tailles, elles seront non seulement chères à calculer mais aussi à inverser. Elles perturberont également le remplissage des matrices de raideurs quand elles interviendront dans la condition de Robin. Dans un souci d'efficacité et de simplicité de mise en œuvre de la méthode, ce chapitre propose un calcul approché de ce produit scalaire dont l'équivalence avec la version exacte a été vérifiée numériquement. Ce calcul approché est applicable aussi bien aux interfaces dont toutes les mailles ont la même taille, maillage appelé régulier, qu'au cas des interfaces à maillage irrégulier, i.e. dont les mailles sont de taille variable.

3.1 Le produit scalaire de $H^{1/2}(\partial\Omega^s)$

$H^{1/2}(\partial\Omega^s)$ est un espace trace dont la construction mène au produit scalaire détaillé dans les paragraphes suivants (Cf. A.2).

3.1.1 Ecriture continue du produit scalaire

Le produit scalaire de $H^{1/2}(\Gamma)$, pour $\Gamma \in \mathbb{R}^n$ un domaine de longueur caractéristique unitaire, est donné par l'expression suivante :

$$(u, v)_{1/2, \Gamma} = \int_{\Gamma} u(x)v(x) \, dx + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^n} \, dx \, dy, \quad \forall u, v \in H^{1/2}(\Gamma) \quad (3.1.1)$$

Le premier terme est le produit scalaire de $L^2(\partial\Omega^s)$ complété par une double intégrale sur le domaine de calcul. Dans le cas d'applications aux calculs de structures, le domaine de calcul sera une interface Γ entre sous-domaines :

- Γ est 1D (un segment) dans le cas d'une étude mécanique 2D ;
- Γ est 2D (une surface) dans le cas d'une étude mécanique 3D.

Dans la formulation (3.1.1), le second terme présente une pseudo-singularité. Pour $x \rightarrow y$, le terme sous l'intégrale double tend vers l'infini. Les paragraphes suivants montreront qu'un changement de variable adapté permet de lever la singularité.

Remarque : Dans le cas de $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$, un terme supplémentaire est à calculer :

$$(u, v)_{1/2, 00, \Gamma} = (u, v)_{1/2, \Gamma} + \int_{\Gamma} \frac{u(x)v(x)}{d(x, \partial\Gamma)} \, dx, \quad \forall v, u \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$$

Où $d(x, \partial\Gamma)$ est la distance de x à $\partial\Gamma$.

3.1.2 Propriétés

Dans un souci d'application de ce produit scalaire à un calcul de travaux en mécanique, une analyse d'homogénéité de la formulation (3.1.1) montre un écart entre les deux termes. Le deuxième terme doit être multiplié par une longueur pour assurer son homogénéité avec le produit scalaire de $L^2(\partial\Omega^s)$.

Par ailleurs, des premiers calculs rapides sur une interface 1D montrent que le terme sous la forme d'une double intégrale présente la particularité d'être invariant par homothétie géométrique de Γ .

Ces propriétés ont guidé une légère modification de la formulation (3.1.1) pour l'utilisation de ce produit scalaire dans la méthode proposée au chapitre précédent. Un paramètre supplémentaire α sans unité est introduit et le produit scalaire utilisé sera :

$$(u, v)_{1/2, \Gamma} = \int_{\Gamma} u(x)v(x) \, dx + \alpha L_c^{\Gamma} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^n} \, dS_x \, dS_y, \quad \forall u, v \in H^{1/2}(\Gamma) \quad (3.1.2)$$

Où L_c^{Γ} est une longueur caractéristique de l'interface. Typiquement, pour une interface 1D, on prendra la longueur de cette interface.

3.1.3 Approches existantes

Si l'utilisation de ce produit scalaire plus adapté aux quantités traitées sur l'interface vise à capter d'avantage d'informations, son calcul est délicat à cause de la pseudo-singularité et peut s'avérer coûteux.

3.1.3.1 Approche par un calcul exact

L'utilisation de ce produit scalaire dans les méthodes des éléments de frontière a mené au développement de méthodologies d'intégration adaptées à des domaines 2D. Ainsi, dans [Frangi *et al.*, 2002], une approche par changements de variables successifs est détaillée. Visant une application sur une surface discrétisée, l'approche distingue pour la double intégrale, les cas où les variables appartiennent à des éléments adjacents, coïncidents ou dissociés. L'exhaustivité des cas traités permet un calcul exact du produit scalaire en éliminant systématiquement les singularités mais présente l'inconvénient d'imposer un effort d'implémentation numérique important.

3.1.3.2 Norme discrétisée de $H^{1/2}(\partial\Omega)$

Une approche visant les applications à des domaines 1D a également été proposée dans [Casas et Raymond, 2006]. Elle se base sur une approximation de l'espace à balayer.

En supposant que Ω est un sous-ensemble borné de \mathbb{R}^2 et en se plaçant dans le cas $0 < s < 1$ et $1 \leq p \leq \infty$, la norme de $W^{s,p}(\partial\Omega)$ est alors définie par :

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Gamma)} = \left[\|u\|_{L^p(\Gamma)}^p + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{1+sp}} dS_x dS_y \right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{pour } p < \infty$$

$$\|u\|_{W^{s,\infty}(\Gamma)} = \|u\|_{L^\infty(\Gamma)} + \sup_{x,y \in \Gamma, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^s}.$$

On introduit une version discrétisée de cette norme définie dans un espace éléments finis U_h de fonctions affines par morceaux et continues sur l'interface Γ :

$$\|u_h\|_{h,s,p} = \left(h \sum_{j=1}^{N_e} |u_{h,j}|^p + h^2 \sum_{i \neq j} \frac{|u_{h,j} - u_{h,i}|}{(x_j - x_i)^{1+sp}} \right)^{1/p} \quad \text{pour } p < \infty$$

$$\|u_h\|_{h,s,\infty} = \max_{1 \leq j \leq N(h)} |u_{h,j}| + \max_{i \neq j} \frac{|u_{h,j} - u_{h,i}|}{|x_j - x_i|^s}$$

Où $h_j = |x_{j+1} - x_j|$ et $h = \max_{1 \leq j \leq N(h)} h_j$. On notera que la somme se fait sur le nombre d'éléments contenus dans le domaine support de l'intégration N_e . Il est prouvé dans [Casas et Raymond, 2006] que ces deux normes sont équivalentes pour un maillage uniformément régulier i.e. :

$$\exists \rho > 0 \text{ tel que } h \leq \rho h_j \text{ pour chaque } 1 \leq j \leq N(h)$$

Dans [Bernardi *et al.*, 2009] les auteurs avancent que l'équivalence doit pouvoir être étendue à une catégorie plus large de maillages en se basant sur plusieurs essais allant dans ce sens

pour la norme $H_{00}^{1/2}$ avec la méthode de pénalité. Le produit scalaire associé qui est adopté est :

$$[[u, v]] = \sum_{j=1}^{N_e} |x_{j+1} - x_j| \cdot u^j \cdot v^j + \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{k=1, k \neq j}^{N_e} |x_{j+1} - x_j| \cdot |x_{k+1} - x_k| \cdot \frac{(u^j - u^k)(v^j - v^k)}{(x_j - x_k)^2}$$

Plus simple à implémenter que la version exacte, ce calcul approché constitue la base de l'approche détaillée dans les paragraphes qui suivent.

3.2 Proposition de calcul approché

Bien qu'il soit efficace, le calcul approché tel que proposé dans [Bernardi *et al.*, 2009] est dédié à $H_{00}^{1/2}$. Il présente certaines approximations dont il souhaitable de se passer afin d'assurer une richesse spectrale suffisante à la matrice de masse pour rendre compte au mieux des comportements à l'interface. Dans cette section, un nouveau calcul approché du produit scalaire est proposé et validé pour des problèmes en 2 dimensions spatiales.

3.2.1 Formulation

3.2.1.1 Analyse d'une première approximation

Le schéma d'intégration approché proposé pour $H_{00}^{1/2}$ par [Bernardi *et al.*, 2009] utilise les valeurs "à la gauche" de l'élément support de l'intégration. Dans un souci de simplicité des illustrations, les paragraphes suivants se basent sur un exemple d'une interface à 4 éléments et 5 nœuds. Le schéma d'intégration approché est présenté figure 3.1. Plus précisément,

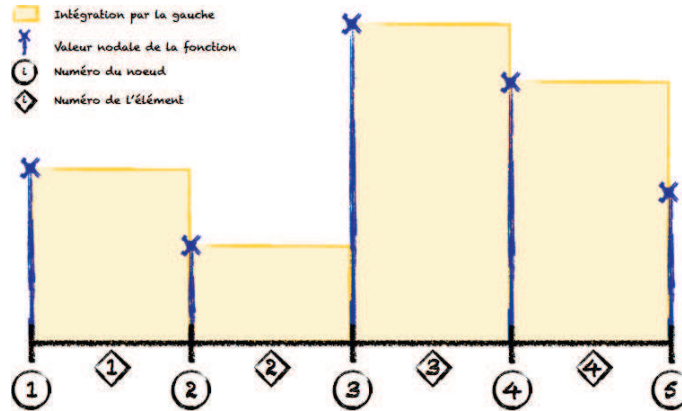
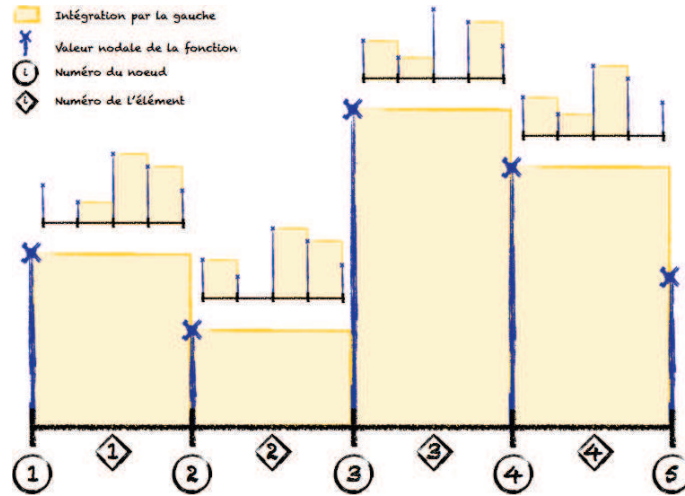


FIGURE 3.1 – Schéma d'intégration à gauche.

le terme pseudo-singulier du produit scalaire étant une double intégrale, le schéma d'intégration choisi s'imbrique pour chaque évaluation, concaténant ainsi les approximations. En prenant en compte la condition d'élimination pour le cas où le dénominateur s'annule, le schéma d'intégration discrète proposé dans [Bernardi *et al.*, 2009] est représenté figure 3.2. La double-intégration représentée correspond au calcul d'un seul coefficient de la matrice de masse.

Proposé pour $H_{00}^{1/2}$, ce schéma n'implique pas la valeur au dernier nœud des fonctions dont on calcule le produit scalaire. Un schéma adapté au calcul de travail dans $H^{1/2}$ doit nécessairement prendre en compte tous les nœuds de l'interface.

FIGURE 3.2 – Schéma complet d'intégration approchée, [Bernardi *et al.*, 2009].

3.2.1.2 Proposition d'un schéma approché

Afin de s'affranchir de la non-prise en compte d'une des valeurs du bord de l'interface, le schéma d'intégration proposé distingue le traitement des nœuds extrema de celui des nœuds internes. En repartant de l'exemple simple du paragraphe précédent, le principe est de prolonger l'intégration au dernier nœud de l'interface en utilisant l'élément à sa gauche comme support, comme représenté figure 3.3. Ce schéma peut également être vu comme

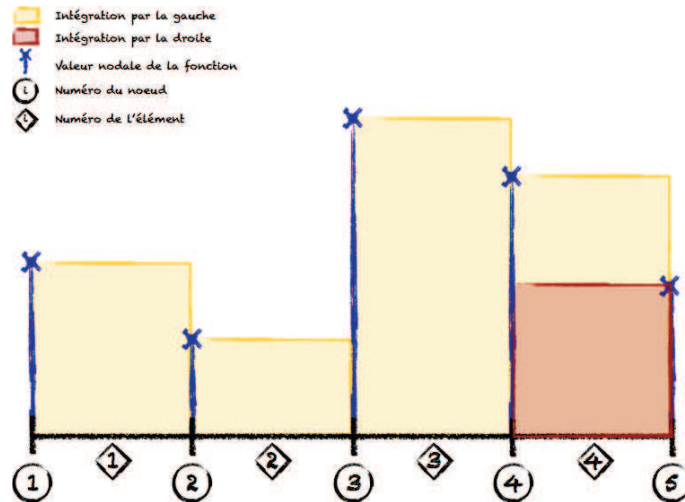


FIGURE 3.3 – Schéma d'intégration à gauche prolongé.

une intégration sur des éléments équivalents dont le centre est confondu avec les nœuds de l'interface, voir figure 3.4. L'approximation ne porte ainsi plus sur les valeurs à intégrer mais sur le domaine sur lequel l'intégration est effectuée.

La prise en compte de la longueur d'intégration locale spécifique aux cas extrema permet alors de faire porter la double boucle non pas sur le nombre d'éléments à l'interface mais

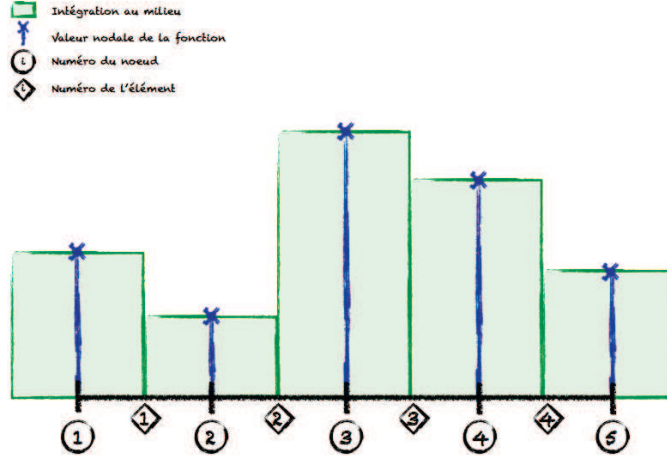


FIGURE 3.4 – Schéma d'intégration équivalent à la prolongation avec élément virtuels.

bien sur le nombre de nœuds. Toutes les valeurs des fonctions à intégrer sont ainsi atteintes. Le second terme pseudo-singulier du produit scalaire est donc approché par :

$$\left\langle \underline{\varphi}_i ; \underline{\varphi}_j \right\rangle_{H^{1/2}} - \left\langle \underline{\varphi}_i ; \underline{\varphi}_j \right\rangle_{L^2} = \sum_k^{N_n} \sum_{l, l \neq k}^{N_n} h_k h_l \frac{(\varphi_i(x_k) - \varphi_i(x_l))(\varphi_j(x_k) - \varphi_j(x_l))}{|x_k - x_l|^2}$$

où

$$h_m = \begin{cases} |x_m - x_{m-1}| & \text{si } m = N_n \\ |x_{m+1} - x_m| & \text{sinon} \end{cases}$$
(3.2.1)

Soit, de manière détaillée :

$$\begin{aligned} & \left\langle \underline{\varphi}_i ; \underline{\varphi}_j \right\rangle_{H^{1/2}} - \left\langle \underline{\varphi}_i ; \underline{\varphi}_j \right\rangle_{L^2} \\ &= \sum_k^{N_n-1} \sum_{l, l \neq k}^{N_n-1} |x_{k+1} - x_k| |x_{l+1} - x_l| \frac{(\varphi_i(x_k) - \varphi_i(x_l))(\varphi_j(x_k) - \varphi_j(x_l))}{|x_k - x_l|^2} \\ &+ \sum_k^{N_n} |x_{k+1} - x_k| |x_l - x_{l-1}| \frac{(\varphi_i(x_k) - \varphi_i(x_l))(\varphi_j(x_k) - \varphi_j(x_l))}{|x_k - x_l|^2} \quad \text{si } l = N_n \\ &+ \sum_l^{N_n} |x_k - x_{k-1}| |x_{l+1} - x_l| \frac{(\varphi_i(x_k) - \varphi_i(x_l))(\varphi_j(x_k) - \varphi_j(x_l))}{|x_k - x_l|^2} \quad \text{si } k = N_n \end{aligned}$$
(3.2.2)

La contribution provenant du premier terme L^2 peut, quant à elle, être calculée de manière exacte dans la majeure partie des cas.

3.2.2 Mise en œuvre numérique

L'implémentation numérique de ce calcul approché se fait en deux étapes :

- Etape 1 : calcul de la matrice de masse du produit scalaire de L^2 ;
- Etape 2 : calcul de la matrice complémentaire correspondant au terme pseudo-singulier.

La mise en œuvre du produit scalaire de L^2 est classique et ne présente pas de difficulté particulière. On notera malgré tout qu'un calcul complet de cette matrice est réalisé, elle n'est pas *lumpée*.

Le calcul de la matrice complémentaire sur une interface discrétisée par éléments finis repose sur l'imbrication de deux boucles du schéma proposé. Les deux boucles balayent la liste des nœuds du domaine à intégrer. Pour des raisons de clarté dans les écritures, les expressions à venir sont celles à appliquer dans le cas général. Les versions pour les extrema du domaine sont volontairement omises. En se plaçant à l'intérieur de ces boucles, i.e. à k et l fixés, la contribution $m_{kl}^{1/2}$ à la matrice de masse finale est calculée sur la base de matrices élémentaires d'intégration :

$$\begin{aligned} m_{kl}^{1/2} &= |x_{k+1} - x_k| |x_{l+1} - x_l| \frac{(\underline{\varphi}_i(x_k) - \underline{\varphi}_i(x_l)) (\underline{\varphi}_i(x_k) - \underline{\varphi}_i(x_l))}{|x_k - x_l|^2} \\ m_{kl}^{1/2} &= \frac{|x_{k+1} - x_k| |x_{l+1} - x_l|}{|x_k - x_l|^2} (\underline{\varphi}_i(x_k) - \underline{\varphi}_i(x_l)) (\underline{\varphi}_i(x_k) - \underline{\varphi}_i(x_l)) \\ m_{kl}^{1/2} &= \frac{|x_{k+1} - x_k| |x_{l+1} - x_l|}{|x_k - x_l|^2} \begin{bmatrix} \underline{\varphi}_i(x_k) & \underline{\varphi}_i(x_l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\varphi}_j(x_k) \\ \underline{\varphi}_j(x_l) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Une fois la contribution locale effectuée, on distribue les contributions dans la matrice $\mathbf{M}^{1/2}$ finale :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{1/2}[k; k] &= m_{kl}^{1/2}[1; 1] \\ \mathbf{M}^{1/2}[k; l] &= m_{kl}^{1/2}[1; 2] \\ \mathbf{M}^{1/2}[l; k] &= m_{kl}^{1/2}[2; 1] \\ \mathbf{M}^{1/2}[l; l] &= m_{kl}^{1/2}[2; 2] \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

3.3 Validation de l'approche proposée

La validation du calcul approché du produit scalaire est une étape essentielle à son utilisation dans la méthode de décomposition de domaine proposée. Elle repose sur une comparaison avec un calcul exact qui fait l'objet des paragraphes suivants.

3.3.1 Démarche

L'approche proposée est à valider pour des discrétisations régulières et irrégulières du domaine d'intégration. L'objectif est que la matrice obtenue par calcul approché M_{app} définisse une norme équivalente à la matrice calculée exactement M_{ex} , au sens où les constantes impliquées dans la relation d'équivalence dépendent faiblement de la discrétisation. Cette propriété revient à montrer que les valeurs propres extrémales λ_{min} et λ_{max} du problème généralisé $\det(\lambda M_{app} - M_{ex}) = 0$ ne dépendent pas du maillage.

La démarche de validation numérique adoptée est illustrée figure 3.5. Elle consiste à automatiser les calculs exacts sous Maple et approchés sous Scilab pour obtenir les bornes recherchées. Les calculs sont menés sur plusieurs discrétisations pour des fonctions de formes éléments finis linéaires. Les calculs des contributions des deux termes du produit scalaire sont dissociés. La partie L^2 est traitée directement dans Scilab. La partie pseudo-singulière est calculée de manière exacte dans Maple et de manière approchée, selon le schéma proposé, dans Scilab. La contribution exacte issue de Maple est ensuite importée dans Scilab pour la détermination des bornes λ_{min} et λ_{max} . Les diverses implémentations ont été validées par

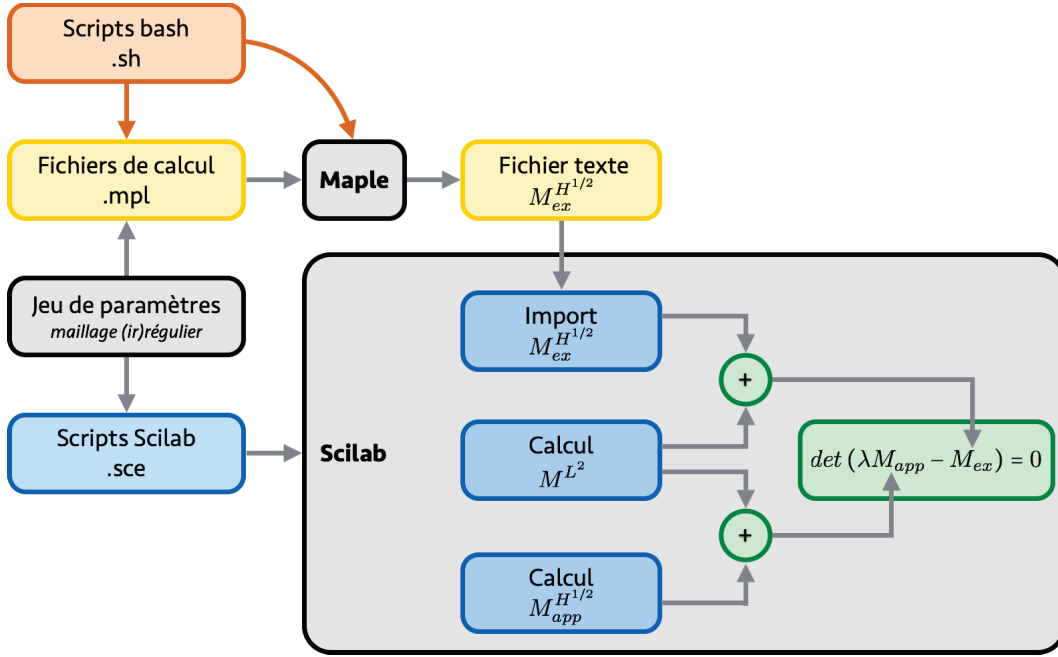


FIGURE 3.5 – Structure du code de validation de l'approche

comparaison à des calculs à la main pour des produits scalaires entre fonctions linéaires et quadratiques.

Le calcul formel direct sous Maple du second terme du produit scalaire échoue dans certaines situations à cause de la pseudo-singularité. Le calcul robuste et exact de la partie pseudo-singulière dans Maple fait l'objet du paragraphe suivant.

3.3.2 Calcul de référence

L'approche adoptée est inspirée de [Frangi *et al.*, 2002] : elle distingue les cas de singularités rencontrées et les traite séparément pour les éliminer par changement de variable.

Le terme pseudo-singulier faisant l'objet d'une approche de calcul particulière est le suivant :

$$\begin{aligned}
 (u, v)_{1/2, \Gamma} - (u, v)_{L^2, \Gamma} &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^n} dx dy \\
 &= \sum_i^{N_e} \int_{x \in E_i} \sum_j^{N_e} \int_{y \in E_j} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^n} dx dy
 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Pour une discrétisation de $\Gamma = \bigcup_i^{N_e} E_i$ par éléments finis, le balayage des éléments dans la double intégration présente une singularité dans deux cas :

- Le cas des éléments coïncidents : $E_i = E_j$;
- Le cas des éléments adjacents : E_i et E_j sont consécutifs et partagent un nœud de leur bord.

Ces cas sont traités de façon distincte. En effet, dans le premier cas, la singularité porte sur une droite du domaine d'intégration alors que dans le second, elle n'apparaît qu'en

un seul point. Les tracés des figures 3.6 et 3.7, obtenus pour les fonctions tests arbitraires $u(x) = 12x^2 - 5x + 3$ et $v(x) = x - 45$, illustrent ces singularités : la diagonale dans le premier cas, le point extrémité dans le second.

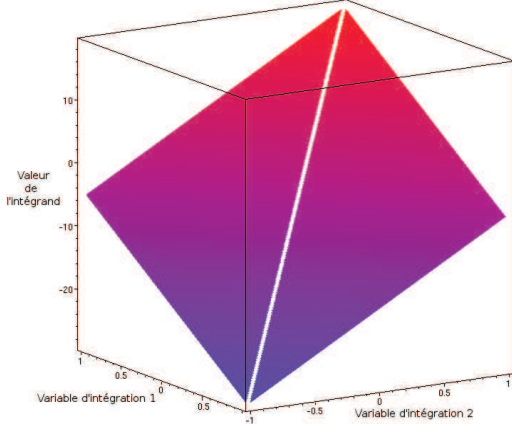


FIGURE 3.6 – Tracé de la fonction à intégrer dans le cas éléments coïncidents.

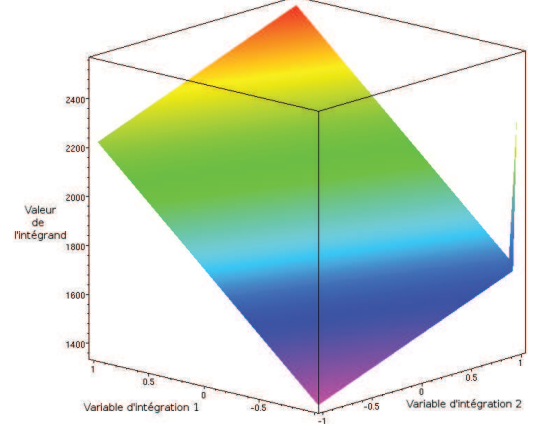


FIGURE 3.7 – Tracé de la fonction à intégrer dans le cas des éléments adjacents.

Dans le cas des éléments coïncidents figure 3.6, on constate une symétrie de tracé par rapport à la diagonale de singularité contrairement au cas des éléments adjacents figure 3.7 où la singularité en un point apparaît hors diagonale.

Le but de la transformation par introduction d'un changement de variable est, dans un premier temps, de concentrer la singularité dans une seule nouvelle variable qu'on qualifie de "porteuse de la singularité". L'intégrale est singulière lorsque cette variable s'annule, elle remplacera ici le dénominateur. Le changement de variable doit ensuite faire apparaître la porteuse de la singularité dans le jacobien sous une forme permettant d'éliminer son effet.

3.3.2.1 Cas des éléments coïncidents

On décrit la position sur ces deux mêmes éléments par les variables η et $\tilde{\eta}$ (Cf. figure 3.8) qui évoluent dans l'intervalle $[-1; 1]$, ce qui revient à travailler sur des éléments de références.

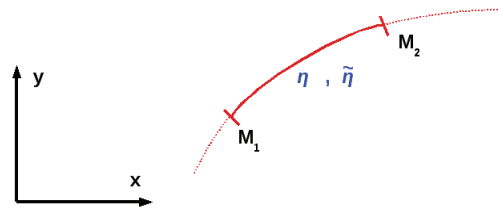


FIGURE 3.8 – Élément zone de double intégration surfacique et paramétrage par les variables η et $\tilde{\eta}$.

Afin de se libérer de la singularité qui se situe sur la première bissectrice, on profite de la symétrie par rapport à la diagonale. Le choix est fait de n'intégrer que sur une moitié du carré $(\eta, \tilde{\eta}) \in [-1; 1] \times [-1; 1]$ délimitée par la droite de singularité, puis de multiplier par

deux le résultat obtenu. On effectue alors le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} \eta &= u(1-v) - v \\ \tilde{\eta} &= u(1-v) + v \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Le nouveau domaine d'intégration est représenté par le domaine 1 sur la figure 3.9. Sur cette figure ainsi que sur la figure 3.10, on observe le nouveau balayage du domaine d'intégration par les variables $u \in [-1; 1]$ et $v \in [0; 1]$.

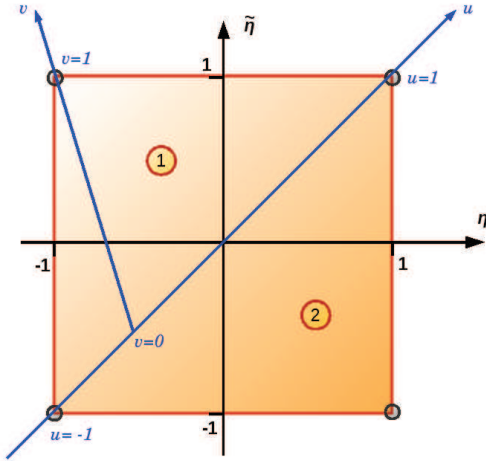


FIGURE 3.9 – Représentation du changement de variable et modification du domaine d'intégration.

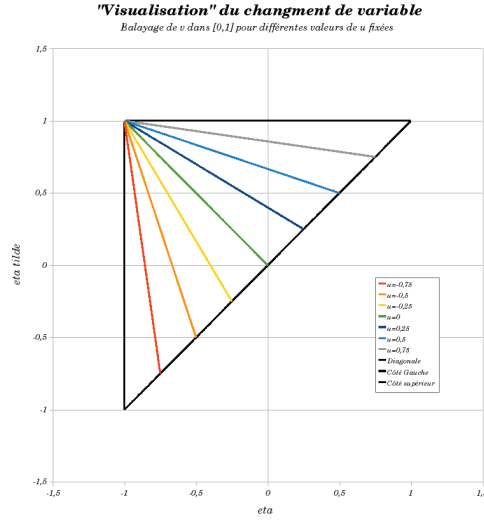


FIGURE 3.10 – Visualisation du balayage : v varie pour certaines valeurs fixées de u .

La variable v est porteuse de la singularité, elle est nulle quand $\eta = \tilde{\eta}$. Enfin, on calcule le Jacobien de ce changement de variables : $d\eta d\tilde{\eta} = 2(1-v) du dv$.

On peut montrer que la singularité s'efface pour des cas plus généraux que ces types de fonctions de forme grâce au jacobien. Le calcul final est alors mené sans difficulté par les méthodes de quadrature usuelles ou par les méthodes intégrées dans les codes de calculs.

3.3.2.2 Cas des éléments adjacents

La singularité est ici localisée en un seul point. En effet, en passant à des éléments de référence paramétrés par $(\eta, \tilde{\eta}) \in [-1; 1] \times [-1; 1]$ (Cf figure 3.11), la singularité apparaît lorsque $\eta = 1$ et $\tilde{\eta} = -1$.

L'absence de symétrie particulière mise en évidence par la figure 3.7 contraint à intégrer sur la totalité du carré $(\eta, \tilde{\eta}) \in [-1; 1] \times [-1; 1]$. On adopte alors une stratégie à deux étapes :

1. Une intégration classique sur le triangle $[(-1, -1); (-1, 1); (1, 1)]$ qui ne présente pas de difficultés particulières ;
2. Un changement de variable permettant d'intégrer sur l'autre triangle $[(-1, -1); (1, -1); (1, 1)]$ contenant la singularité en $(1, -1)$.

Pour la deuxième étape, le changement de variable à utiliser est :

$$\begin{cases} \eta &= v(u-1) + 1 \\ \tilde{\eta} &= v(u+1) - 1 \end{cases} \quad (3.3.3)$$

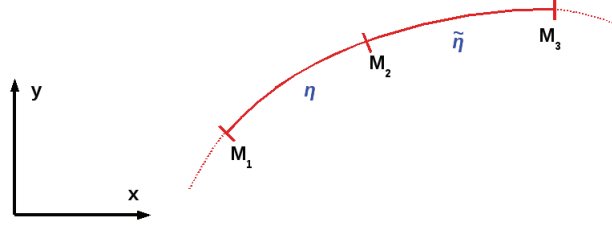


FIGURE 3.11 – Élément zone de double intégration surfacique et paramétrage par les variables η et $\tilde{\eta}$.

Le nouveau balayage du triangle inférieur est représenté sur les figures 3.12 et 3.13.

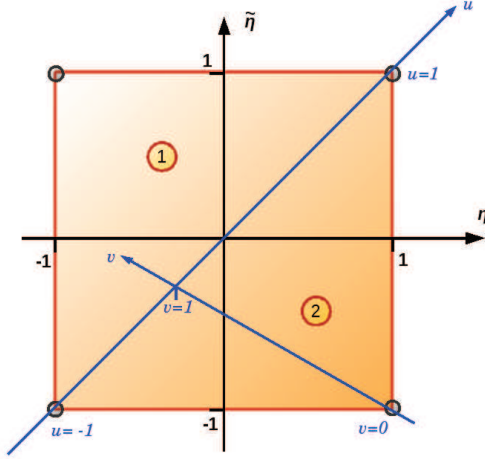


FIGURE 3.12 – Représentation du changement de variable et modification du domaine d'intégration.

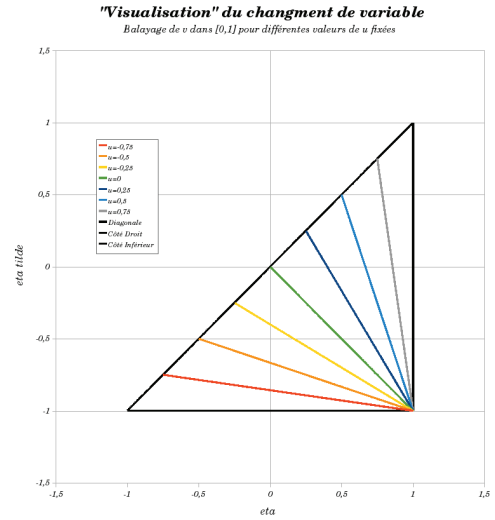


FIGURE 3.13 – Visualisation du balayage : v varie pour certaines valeurs fixées de u .

La variable v est à nouveau porteuse de la singularité, elle s'annule quand $\eta = 1$ et $\tilde{\eta} = -1$. Le calcul du jacobien donne $d\eta d\tilde{\eta} = 2v du dv$.

De même, on peut montrer la généralité de la simplification qu'apporte ce changement de variable. D'un point de vue implémentation numérique dans la mesure où la procédure existe déjà, il semble avantageux de calculer I_1 par la même méthode que celle exposée au paragraphe précédent.

Ayant les moyens de calculer la partie singulière du produit scalaire de $H^{1/2}$ pour des fonctions de forme de type polynomial dans le cas des études en 2D, la procédure de validation du calcul approché peut être déroulée. Ces calculs exacts via changements de variables ont été implémentés dans Maple. La seule implémentation viable d'un point de vue temps de calcul et utilisation de mémoire vive est de séparer le calcul de chaque contribution à la matrice de masse. Pour ces contributions, les temps de calcul varient avec le nombre de nœuds sur l'interface : de trois secondes à environ trois minutes entre des interfaces respectivement de trois éléments et d'une cinquantaine, telles que celles présentées ci-dessous.

3.3.3 Résultats de la validation

Deux ensembles d'interfaces sont étudiés pour valider le calcul approché proposé, toutes les interfaces sont d'une longueur de 1 :

- Interfaces à maillages réguliers : de 3 à 45 éléments de la même taille donnée par $h = \frac{1}{N_e}$ où N_e est le nombre d'éléments.
- Interfaces à maillages irréguliers : de 3 à 45 éléments dont la taille varie de sorte à former les éléments d'une suite géométrique de raison 1.1 et dont la valeur initiale est fixée de sorte que la taille du domaine étudié (concaténation des éléments) soit de 1.

Les interfaces à maillages irréguliers balayent un intervalle de rapport entre la taille maximum et la taille minimum d'environ 1 à 65. Ces interfaces sont représentées figure 3.14.

Le graphique figure 3.15 représente l'évolution de $\max_{(i,j) \in [1, N_e]^2} \left(\frac{h_i}{h_j} \right)$ en fonction du nombre d'éléments sur l'interface.

La plage balayée est choisie pour atteindre les cas extrêmes de maillages irréguliers constatés dans les études mécaniques (au delà de cette irrégularité, voire pour un rapport supérieur à 30, il est avantageux pour la qualité du résultat et les temps de calcul de mailler autrement).

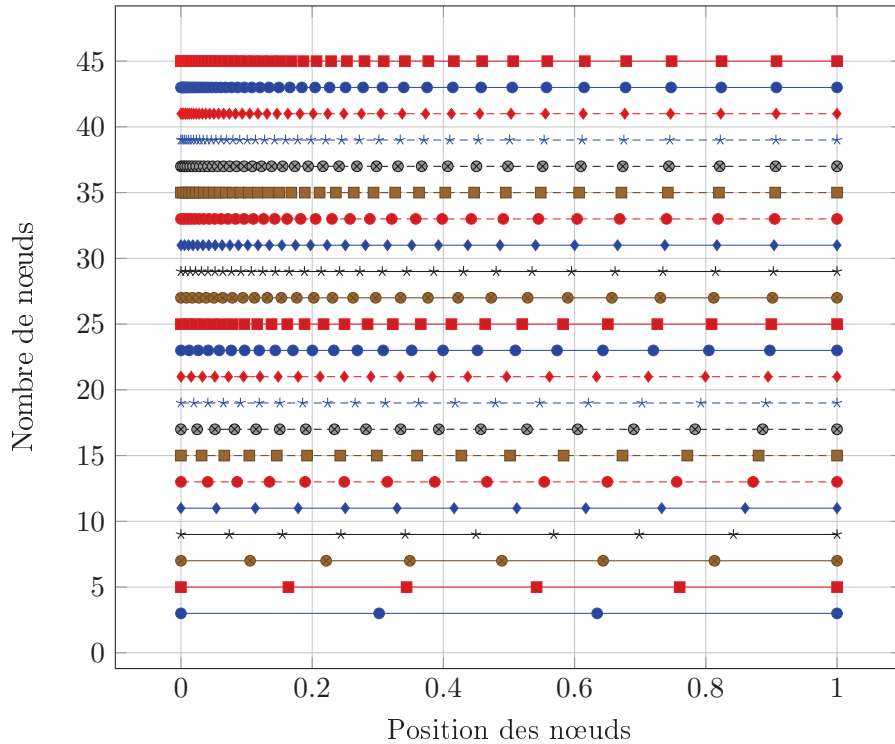


FIGURE 3.14 – Interfaces irrégulières testées.

La mise en œuvre du processus illustré figure 3.5 fournit les résultats tracés dans les figures 3.16. La comparaison simple des coefficients des matrices de masses obtenues permet dans un premier temps de s'assurer de la pertinence du calcul approché. L'évolution des bornes présentée est considérée suffisamment indépendante de la taille de maille pour valider l'utilisation du calcul approché à la place du calcul exact.

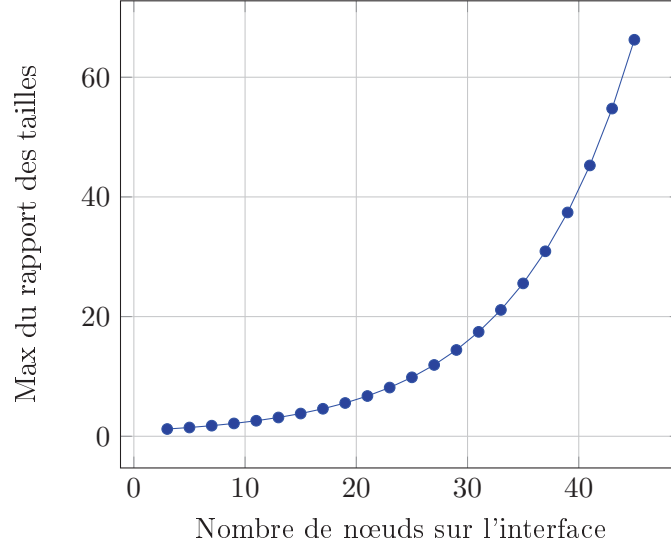


FIGURE 3.15 – Evolution du rapport maximal entre les tailles d'éléments en fonction du nombre d'éléments.

3.4 Extension du calcul approché aux problèmes 3D

Sans qu'une démarche de validation analogue à celle menée pour la proposition de calcul visant les interfaces des problèmes 2D n'ait été menée, la piste d'une extension du calcul approché aux problèmes 3D a été explorée. Le calcul proposé est proche de celui validé dans les paragraphes précédents. Il repose également sur le principe d'une approximation de la surface sur laquelle la double intégrale pseudo-singulière est à évaluer.

$$\left\langle \underline{\varphi}_i ; \underline{\varphi}_j \right\rangle_{H^{1/2}} - \left\langle \underline{\varphi}_i ; \underline{\varphi}_j \right\rangle_{L^2} = \sum_k^{N_n} \sum_{l, l \neq k}^{N_n} S_k S_l \frac{(\underline{\varphi}_i(x_k) - \underline{\varphi}_i(x_l))(\underline{\varphi}_j(x_k) - \underline{\varphi}_j(x_l))}{|x_k - x_l|^3} \quad (3.4.1)$$

Où S_i est la mesure du premier élément de la table de connectivité auquel le nœud i appartient.

Si le choix du premier élément peut sembler arbitraire, il est favorable à une meilleure approximation de la surface Γ . Une alternative naturelle consisterait à prendre une moyenne de la taille des éléments auxquels le nœud considéré appartient. Dès lors que le maillage n'a pas une régularité exemplaire, ce qui est souvent le cas, cette évaluation par moyenne devient néfaste au calcul de l'intégrale (phénomène également constaté pour une variante du calcul approché proposé sur interface à 1 dimension spatiale).

D'autres approximations, un peu plus fines ont été envisagées sans être appliquées (Cf. A.3). Le calcul approché présenté ci-dessus est utilisé avec succès sur un cas test 3D dans le chapitre qui suit.

Plus simple de mise en œuvre, moins coûteux en temps de calcul et en mémoire vive, le calcul approché proposé est également suffisamment précis pour ne pas introduire de biais supplémentaire dans la méthode de décomposition de domaine proposée. Fort de cet outil, le chapitre suivant expose les travaux de validation de la méthode utilisant ce calcul approché.

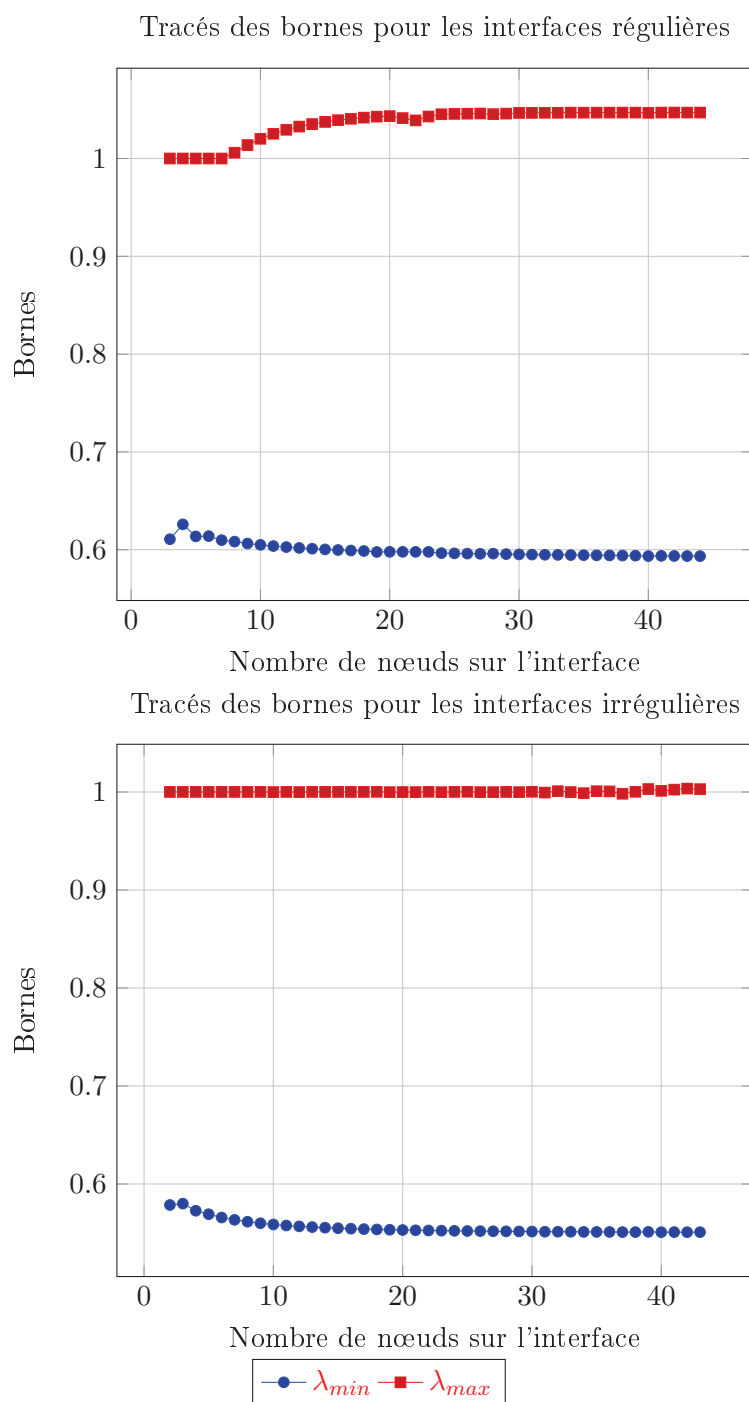


FIGURE 3.16 – Évolution des bornes en fonction de la finesse de discrétisation de l'interface.

Validation de la méthode proposée

Contents

4.1	Mise en œuvre numérique de la méthode	72
4.1.1	Implémentation dans un code de calcul	72
4.1.2	Evaluation de la convergence	72
4.2	Interfaces parfaites	73
4.2.1	Optimisation des paramètres	74
4.2.2	Etude des convergences optimales	76
4.2.3	Extensibilité de la méthode	78
4.2.4	Vers une mise en œuvre tridimensionnelle	82
4.3	Interface de contact	83
4.3.1	Comparaison par rapport à la méthode de sous-discrétisation	83
4.3.2	Prise en compte d'hétérogénéités dans la structure	85
4.3.3	Essai Brinell : comparaison à la théorie de Hertz	87
4.4	Premières applications au calcul d'une jonction boulonnée	87
4.4.1	Principe de modélisation 2D	88
4.4.2	Résultats de la simulation	89

Ce chapitre présente les mises en œuvre, les études d'optimisation des paramètres et de validation de la méthodologie. Dans un premier temps, les résultats portent sur les interfaces de type parfait. L'étude de multiples tailles et maillages permet de mettre en avant un couple de paramètres optimaux pour la méthode développée. L'indépendance de la convergence au pas du maillage est mise en évidence et comparée aux performances obtenues par d'autres représentations des interefforts. L'extensibilité de la méthode est démontrée avant de valider que les paramètres déterminés pour les interfaces parfaites sont applicables aux interfaces de contact. Après des cas tests visant à démontrer la possibilité de prendre en compte des hétérogénéités dans la structure étudiée, la validation de l'implémentation par comparaison à la théorie de Hertz conclut le paragraphe sur les interfaces de contact. Enfin, une première mise en œuvre de la méthode sur un cas représentatif d'une structure industrielle conclut le chapitre.

4.1 Mise en œuvre numérique de la méthode

4.1.1 Implémentation dans un code de calcul

Le méthode a été implémentée en C++ sur les bases de la librairie éléments finis LMTpp développée au LMT Cachan pour la simulation de problèmes de mécanique. Le code MultiNodaLaTin (environ 50 000 lignes) reprend les bases posées par les premiers codes implémentant la méthode LaTin dans sa version multiéchelle [Caignot, 2009] [Nouy, 2003] [Kerfriden, 2008]. Comme explicité figure 4.1, l'exécutable MultiNodaLaTin prend comme entrée un fichier de configuration du calcul en XML. Les maillages, fournis par le code du CEA Cast3M, sont générés par l'exécution de scripts dgibi spécifiant la géométrie et les options de maillages. Seul le mailler de Cast3M est utilisé pour fournir des fichiers de description du maillage au format avs. Le logiciel fournit en sortie des résultats sur les maillages exploitables d'un point de vue mécanique : déplacements, contraintes, déformations, etc. utilisables dans des logiciels de visualisation (Paraview ici). Il produit également des sorties aux formats texte permettant d'analyser le déroulement du calcul. En particulier, les données de convergence sont ensuite exploitables pour des tracés dans Matlab.

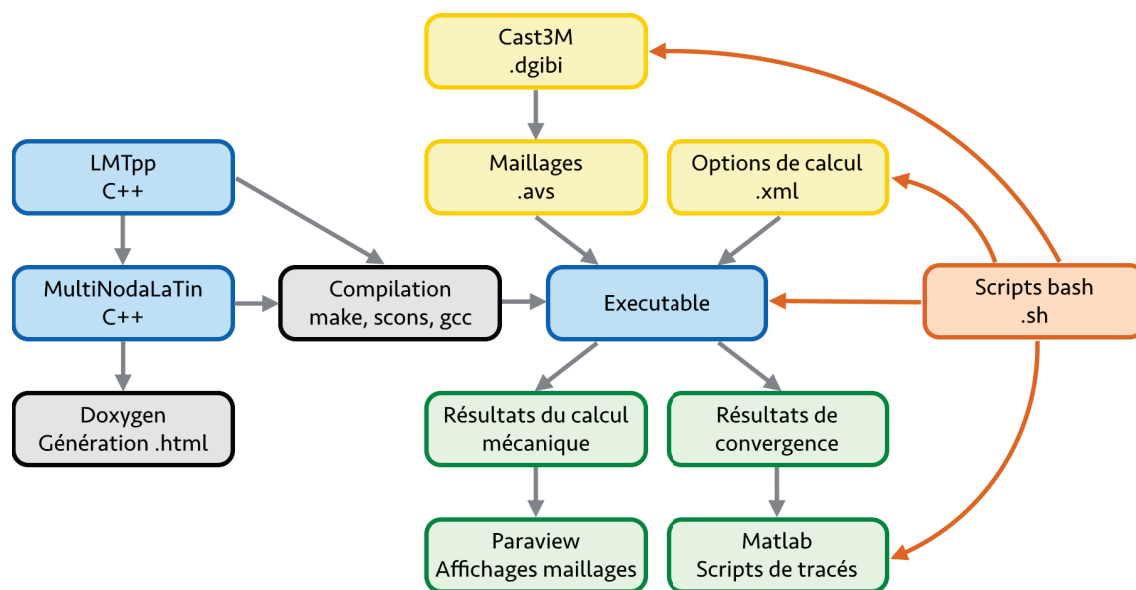


FIGURE 4.1 – Problème type étudié.

L'écriture des données d'entrées, l'enchaînement des calculs et la production des tracés sont automatisés par des scripts bash simplifiant les études d'optimisation et les analyses d'influence.

4.1.2 Evaluation de la convergence

Les méthodes de décomposition de domaine primales et duales, reposant sur des résolutions itératives de systèmes matriciels, évaluent la convergence du calcul par le biais du résidu en cours de minimisation. Dans le cas de la méthode mixte développée dans ces travaux, la notion de convergence est plus difficile à caractériser. S'il est simple, quand cela est possible, de comparer la solution des itérations à une solution de référence pour en évaluer

l'écart et en déduire une convergence, cette solution de référence n'est pas accessible avant la résolution du problème décomposé. Les travaux basés sur la méthode LaTIn utilisent généralement une erreur dite "en relation de comportement" pour évaluer l'évolution d'un itéré par rapport au précédent. La convergence est évaluée de manière relative et, le plus souvent, uniquement sur les quantités d'interface. Le critère d'erreur classique s'exprime par :

$$E_{RdC}^2 = \frac{\sum_s \left(\| \underline{W}_n^s - \underline{W}_{n-\frac{1}{2}}^s \|_{\mathbf{k}_s} + \| \underline{T}_n^s - \underline{T}_{n-\frac{1}{2}}^s \|_{\mathbf{k}_s^{-1}} \right)}{\sum_s \left(\| \underline{W}_n^s + \underline{W}_{n-\frac{1}{2}}^s \|_{\mathbf{k}_s} + \| \underline{T}_n^s + \underline{T}_{n-\frac{1}{2}}^s \|_{\mathbf{k}_s^{-1}} \right)} \quad (4.1.1)$$

$$\| \cdot \|_{\mathbf{k}} = \int_{\Gamma} \cdot^T \mathbf{k} \cdot d\Gamma$$

Bien que simple à calculer et fournissant une indication sur l'avancée du calcul vers une solution stabilisée, ce critère présente l'inconvénient de ne pas nécessairement rendre compte des problèmes de discontinuité au niveau des sous-domaines. Typiquement, dans le cas des problèmes que la sur-discrétisation cherche à résoudre, les déplacements d'interfaces \underline{W} convergent alors que les déplacements sur les bords des sous-structures \underline{u}_b continuent d'osciller.

Afin d'évaluer de manière objective les performances de la méthode, on se donne deux critères de convergence se basant sur une vérification absolue de la continuité des déplacements aux bords des sous-domaines et de l'équilibre des interefforts. Ces deux critères s'écrivent :

$$E_{saut}^2 = \sum_{(s,r)} ((\underline{u}_b^s - \underline{u}_b^r) \cdot (\underline{u}_b^s - \underline{u}_b^r)) \quad E_F^2 = \sum_{(s,r)} \| \underline{T}^s - \underline{T}^r \|_{H^{1/2}} \quad (4.1.2)$$

Pour une application au pilotage d'un calcul, une normalisation par une valeur caractéristique est essentielle afin de ne pas détecter de fausse convergence.

Dans la suite de ce chapitre, les tracés de convergence utiliseront les logarithmes de ces critères.

4.2 Interfaces parfaites

Les premières validations de la méthode proposée portent sur des problèmes avec des interfaces de comportement parfait.

Plusieurs cas tests simples de tailles maîtrisées ont été définis de sorte à déterminer numériquement les valeurs optimales des paramètres de la méthode :

- k_{fact} : paramètre de la direction de recherche, supposé identique sur toutes les interfaces ;
- α_{fact} : paramètre devant la double intégrale pseudo-singulière du produit scalaire de $H^{1/2}$.

Les paragraphes qui suivent présentent les tests effectués sur la géométrie décrite figure 4.2. Ce demi-portique en 2D est composé de trois sous-domaines. Il est encastré à sa base et sollicité par un déplacement sur le bord terminant la branche du Γ . L'interface 1 présente l'intérêt de passer par le point de singularité géométrique à l'angle interne du demi-portique. Sur cette interface, les méthodes de sur-discrétisation des bords des sous-domaines ne sont pas suffisantes pour éliminer les oscillations des déplacements aux bords des deux sous-domaines.

On se place dans le cadre des hypothèses de déformations planes et d'un matériau au comportement linéaire élastique dont le module d'Young est choisi $E = 1$ et le coefficient

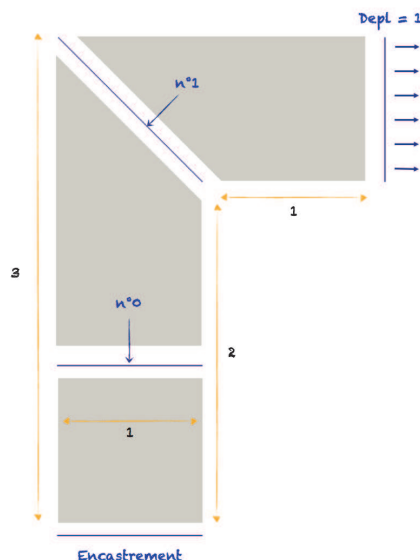


FIGURE 4.2 – “Gamma-shaped structure” : demi-portique avec conditions aux limites de type déplacement.

de poisson $\nu = 0.3$. Sauf mention contraire, ces hypothèses et valeurs sont conservées pour tous les cas tests.

Les domaines sont discrétisés par des éléments triangles de degré 1.

4.2.1 Optimisation des paramètres

On profite de la taille maîtrisée du problème discrétisé pour optimiser les valeurs des deux paramètres de la méthode. Les travaux portent dans un premier temps sur la version mono-échelle de la méthode. L’ajout de l’échelle grossière a un impact négligeable sur la convergence dans le cas d’une structure à 3 sous-domaines.

La démarche d’optimisation est exhaustive. Plusieurs valeurs pour les deux paramètres sont fixées dans une plage de variation large. Tous les couples de paramètres sont testés et, le cas échéant, la liste de valeurs est affinée.

Les valeurs optimales recherchées portent sur des quantités faisant intervenir la discrétisation et des longueurs de la structure. Aussi, les plages de valeurs des paramètres seront balayées sur des variantes du cas test : 4 finesses de maillage h et 4 tailles caractéristiques H de la structure obtenues par homothéties. Les valeurs sont choisies de sorte à balayer une large plage du rapport h/H afin de capter les éventuels effets d’échelle sur les paramètres à optimiser. Le tableau 4.3 résume les cas testés : A titre d’illustration, les 4 tailles de la structure étudiées sont représentées pour la taille de maille 0.1 figure 4.4. A l’inverse, les 4 tailles de mailles testées sont représentées pour la géométrie initiale figure 4.5.

Pour chaque facteur d’échelle, chaque maillage, et chaque couple de paramètres, la résolution du problème mécanique avec la méthode proposée est lancée. Le nombre d’itérations est limité à 40. La valeur des deux critères de convergence, en saut de déplacement et en effort, est relevée à la fin de ces 40 itérations. Le couple de paramètres optimal est celui qui minimise les deux critères.

Les résultats sont présentés sur des surfaces de réponse. A titre d’illustration, les surfaces

h/H	$H = 0.25$	$H = 0.5$	$H = 1$	$H = 2$
$h = 0.05$	0.2	0.1	0.05	0.025
$h = 0.1$	0.4	0.2	0.1	0.05
$h = 0.2$	0.8	0.4	0.2	0.1
$h = 0.35$	1.4	0.7	0.35	0.175

FIGURE 4.3 – Valeurs du rapport $\frac{h}{H}$ balayées par les géométries et maillages utilisés pour l'optimisation des paramètres

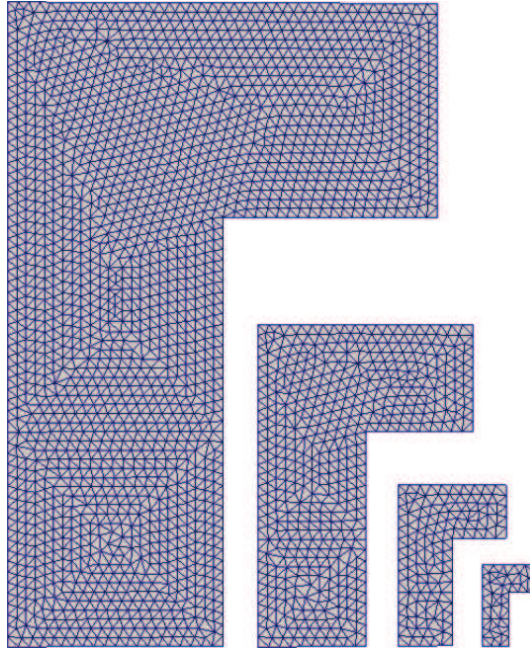


FIGURE 4.4 – Ensemble des géométries étudiées, maillage de taille caractéristique 0.1. De gauche à droite, les facteurs d'échelles sont : 2, 1, 0.5, 0.25

pour les sauts de déplacements obtenus pour le facteur d'échelle 1 sont présentés figure 4.6. Les résultats en effort pour ce même facteur d'échelle sont exposés figure 4.7. Les valeurs optimales obtenues sont :

$$\alpha_{fact} = 0.1 \quad \text{et} \quad \mathbf{k}_{fact} = 0.75 \quad (4.2.1)$$

Ces valeurs optimales ont été retrouvées pour toutes les tailles de mailles à chaque facteur d'échelle. Les résultats complémentaires sont en annexe B. Elles ont été confirmées sur des géométries différentes (poutre à plusieurs sous-domaines, telles que celles des cas tests des paragraphes suivants).

Sauf mention contraire, ces valeurs sont conservées pour tous les calculs suivants.

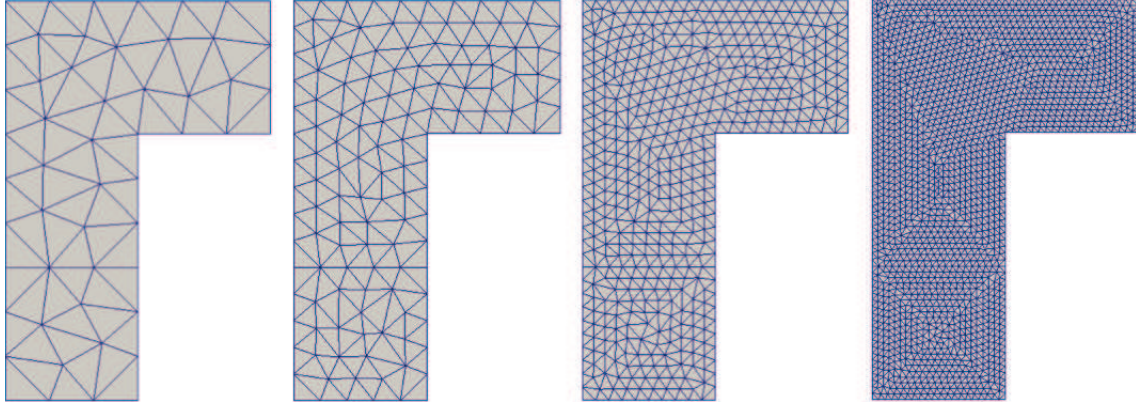


FIGURE 4.5 – Maillages pour le facteur d'échelle 1. De gauche à droite, les tailles caractéristiques sont : 0.35, 0.2, 0.1, 0.05.

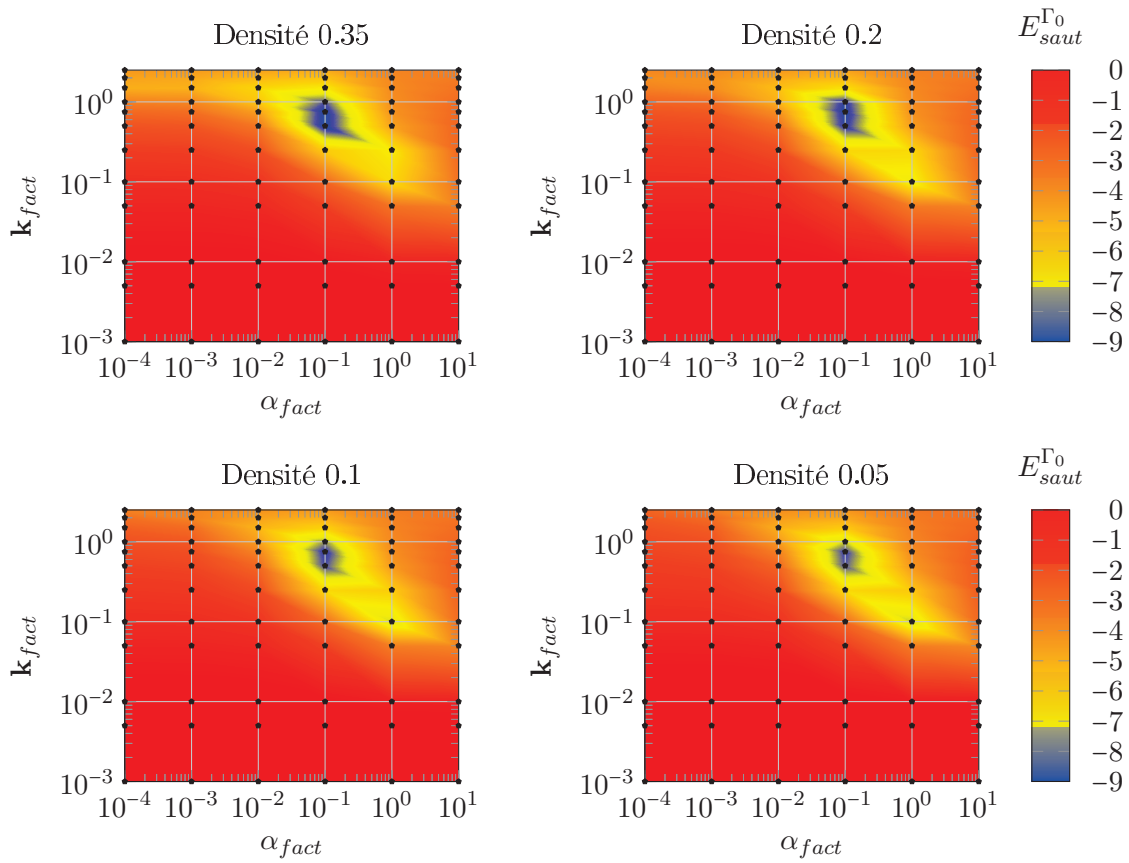


FIGURE 4.6 – Résultats de l'étude paramétrique en saut pour le facteur d'échelle 1.

4.2.2 Etude des convergences optimales

Les paramètres optimaux de la méthode étant fixés, on s'intéresse à l'influence de la taille de maille et du facteur d'échelle sur la vitesse de convergence de la méthode.

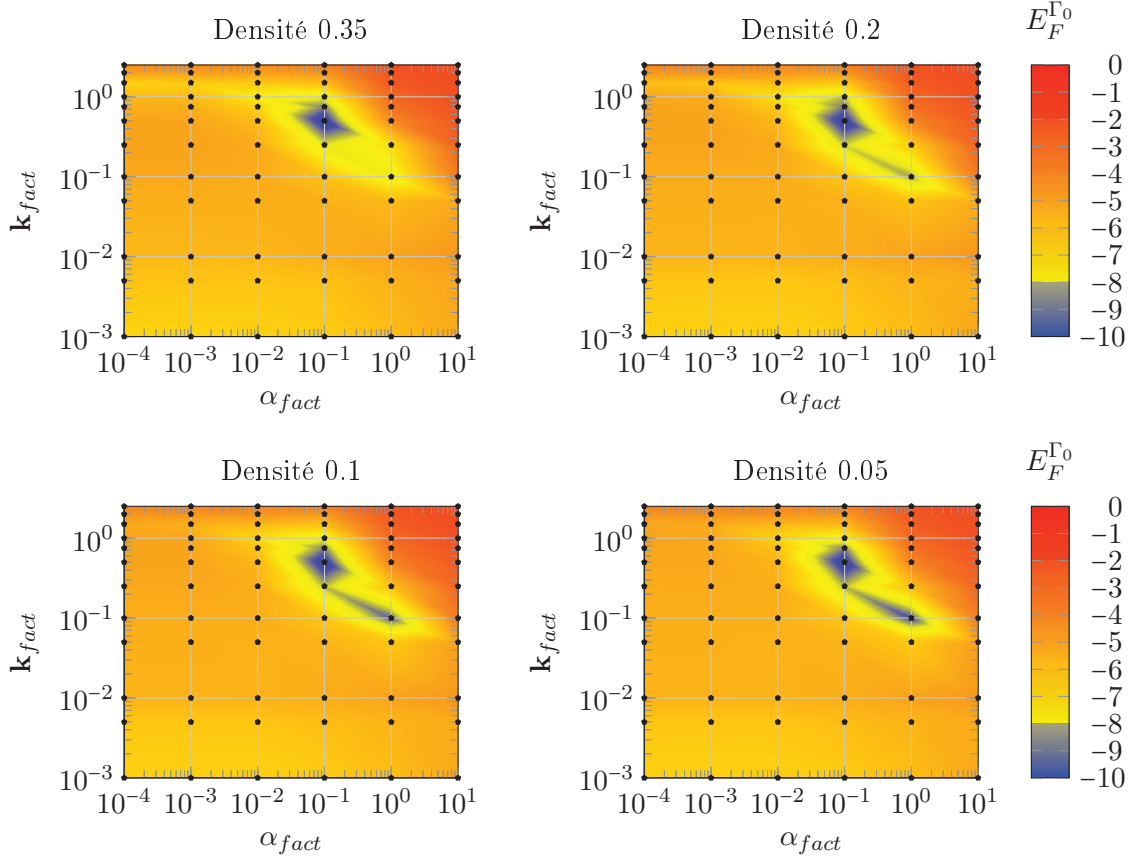


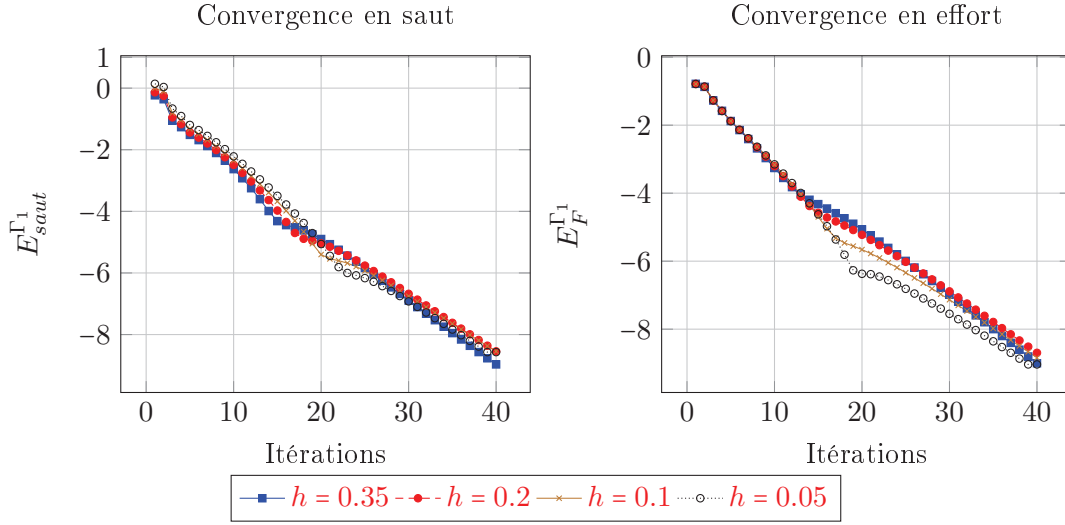
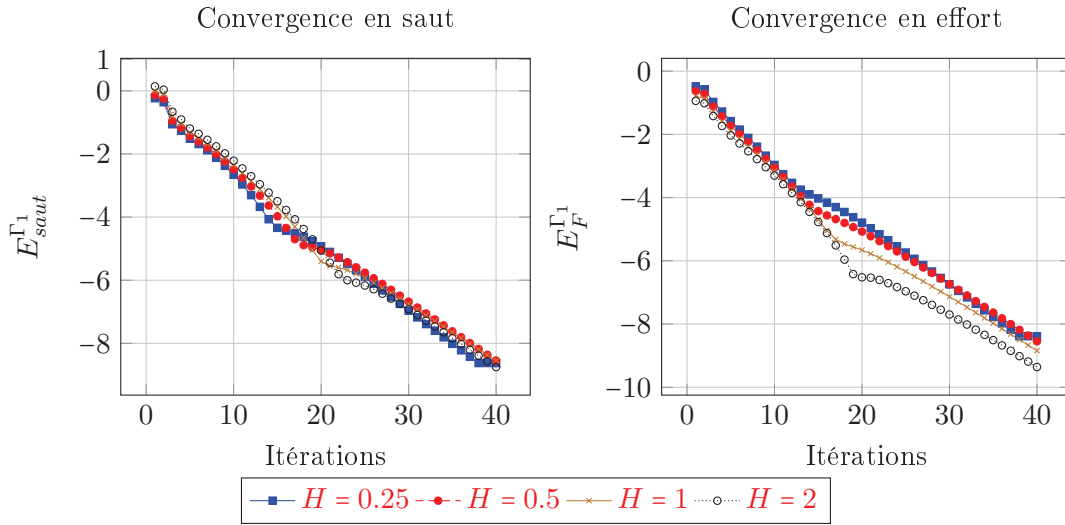
FIGURE 4.7 – Résultats de l'étude paramétrique en effort pour le facteur d'échelle 1.

Les figures qui suivent présentent les courbes d'évolutions des logarithmes des deux critères de convergence pour l'interface 1. La figure 4.8 donne la convergence de la méthode sur 40 itérations pour chacun des maillages dans le cas d'un facteur d'échelle de 1. La figure 4.9 superpose les tracés de convergence pour chaque facteur d'échelle dans le cas d'un maillage de taille caractéristique 0.1.

Ces tracés mettent en évidence une des propriétés majeures de la méthode proposée : **la convergence de la méthode est indépendante du pas du maillage**. En effet, quelle que soit la finesse du maillage, de manière absolue à facteur de forme fixe ou relativement à la taille de la structure, les courbes de convergence sont quasiment superposées.

Un autre élément important de cette étude est le niveau élevé de précision qu'il est possible d'atteindre en terme de continuité des déplacements et d'équilibre des efforts. Outre le faible nombre d'itérations nécessaires à atteindre une valeur des critères de convergence permettant de considérer le calcul convergé, la saturation de ces critères n'est constatée qu'en atteignant des niveaux proches de la précision machine (environ 10^{-15}). Cette précision sur une interface comprenant une singularité géométrique montre une forte tolérance de la méthode à la sous-structuration. Cette propriété peut s'avérer fondamentale au moment de confier la décomposition en sous-domaines à un découpeur automatique.

Les propriétés fondamentales de la méthode proposée ont été démontrées sur un faible nombre de sous-domaines pour la version mono-échelle. Le paragraphe qui suit s'attache à


 FIGURE 4.8 – Comparaison des convergences pour $H = 1$ et h variable

 FIGURE 4.9 – Comparaison des convergences pour $h = 0.1$ et H variable

montrer le bon comportement de la méthode quand le nombre de sous-domaines croît.

4.2.3 Extensibilité de la méthode

Les études d'extensibilité de la version multi-échelle de la méthode sont illustrées sur deux cas tests : une poutre élancée, et une variante d'un cas classique d'étude d'extensibilité, un carré sous-structuré en carrés de même taille.

4.2.3.1 Etude d'extensibilité sur une poutre

On se donne une poutre élancée en 2 dimensions, encastree à une extrémité et sollicitée en déplacement à l'autre extrémité de sorte qu'elle travaille globalement en flexion. La poutre est décomposée en un nombre de sous-domaines H croissant : 2, 3, 4, 6 et 12. Étant tous identiques, la longueur caractéristique de ces sous-domaines varie donc pour chaque décomposition. Ils sont concaténés pour former la poutre et reliés deux à deux par des interfaces de comportement parfait. Toutes les décompositions sont testées avec trois tailles de maille h : 0.1, 0.2 et 0.35.

Dans le même esprit que pour les études sur le demi-portique, la résolution du problème tourne sur un nombre fixé d'itérations au bout desquelles on constate la valeur atteinte par les critères de convergence en saut de déplacement et en équilibre des efforts. Pour ces cas à plus grand nombre de sous-domaines, le nombre d'itérations avant d'arrêter le calcul est fixé à 100.

Le logarithme des valeurs du critère de saut de déplacement pour chaque couple (H, h) est présenté sous forme de surface 4.10 :

- à gauche, les résultats pour la version mono-échelle de la méthode ;
- à droite, ceux pour la version multi-échelle ;

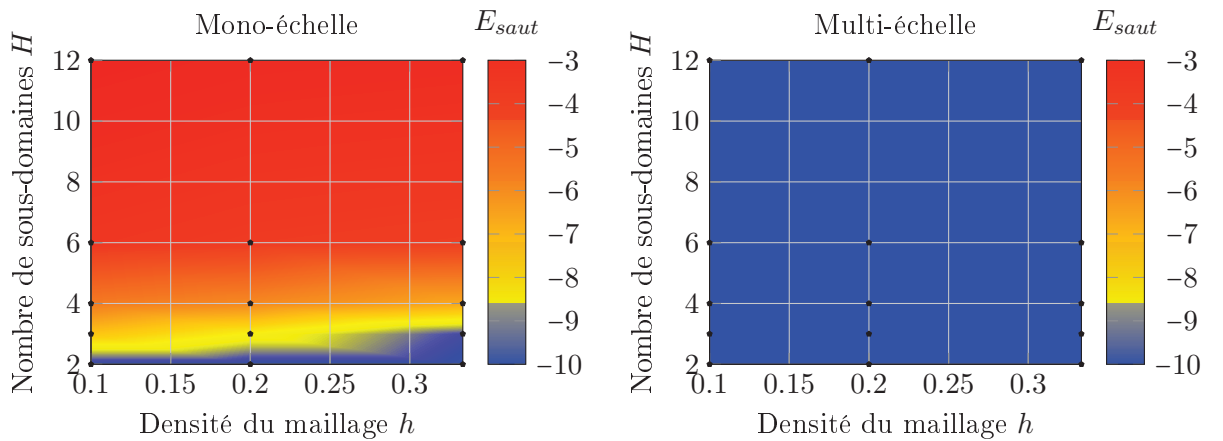


FIGURE 4.10 – Résultats de l'étude paramétrique en effort pour le facteur d'échelle 1.

Pour plus de lisibilité, les deux surfaces sont superposées dans un tracé 3D figure 4.11

Les sous-domaines étant concaténés et la sollicitation en déplacement n'excitant qu'un seul sous-domaine, le nombre croissant de sous-structures pénalise largement la convergence de la version mono-échelle. En effet, sans problème global, l'information doit se propager de proche en proche, sous-structure par sous-structure, à chaque itération. Ainsi, à partir de 4 sous-domaines, le saut de déplacement aux interfaces n'atteint des valeurs faibles qu'à partir d'un nombre d'itérations supérieur à 100.

A l'inverse, quel que soit le nombre de sous-domaines, on constate que la version multi-échelle atteint en 100 itérations des valeurs de saut de l'ordre de la précision machine. Cette convergence rapide est vérifiée pour tous les maillages. Ces études permettent de s'assurer que **la propriété d'indépendance de la convergence vis-à-vis du pas du maillage est conservée avec l'ajout d'un problème grossier**. Ces calculs enrichissent les propriétés en démontrant qu'en introduisant le problème grossier, la convergence

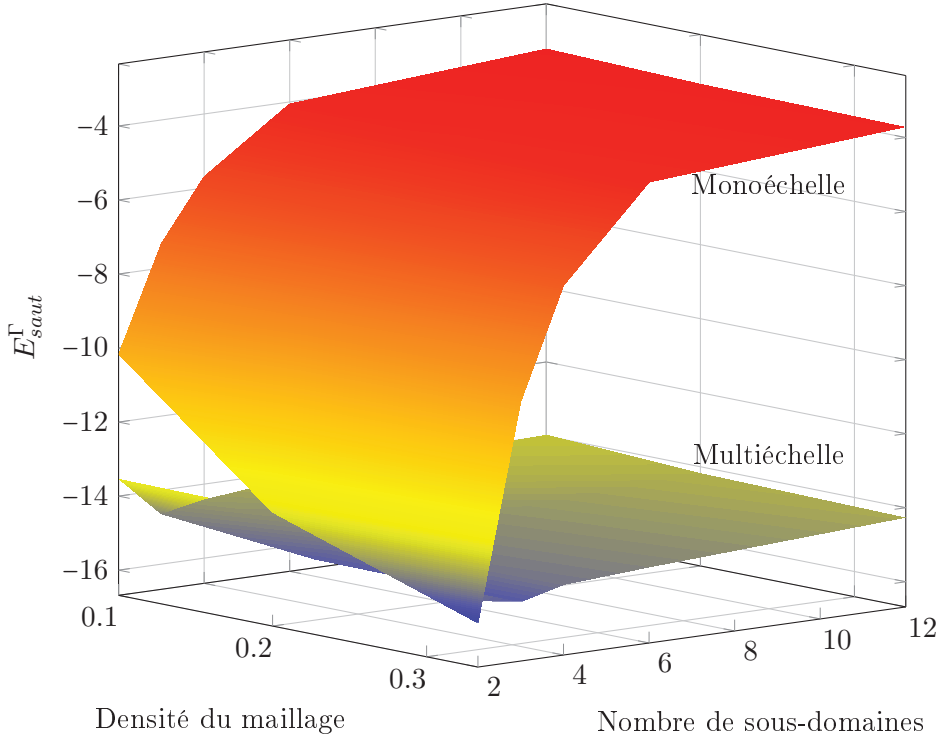


FIGURE 4.11 – Résultats des convergences obtenues pour les approches mono et multi-échelle en balayant une plage de densité de maillage pour plusieurs nombres de sous-domaines.

de la résolution est également indépendante du nombre de sous-structures.

4.2.3.2 Comparaison des convergences avec un travail calculé par le produit scalaire $L^2(\Gamma)$

Les études présentées dans ce paragraphe ont pour double objectif de comparer l'utilisation des produits scalaires de L^2 , choix classique, et de $H^{1/2}$ dans une méthode de décomposition de domaine mixte, et de valider l'utilisation du calcul approché du produit scalaire de $H^{1/2}$ sur des interfaces au maillage non régulier.

La géométrie utilisée est présentée figures 4.12 et 4.13. Il s'agit d'un domaine carré décomposé en 16 sous-domaines. Encastré à son bord gauche, il est sollicité dans les 2 directions de l'espace par des déplacements imposés sur son bord droit.

Deux calculs de travaux sont comparés : l'utilisation classique du produit scalaire L^2 et la nouvelle méthode avec représentant dual. Pour chacun, la méthode est déroulée avec et sans problème global.

Dans les deux implémentations, les paramètres sont optimisés pour fournir les meilleurs résultats selon les critères de saut de déplacement aux interfaces et d'équilibre des inter-efforts. Dans le cas de l'utilisation du produit scalaire de $H^{1/2}$, les optimaux déterminés précédemment sont repris.

Les évolutions des logarithmes des critères de convergence sur 50 itérations sont tracées pour les quatre cas d'études figure 4.14.

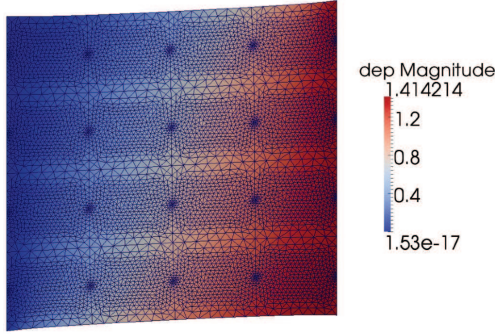


FIGURE 4.12 – Déformée finale du deuxième cas test pour la validation de l'approche multi-échelle.

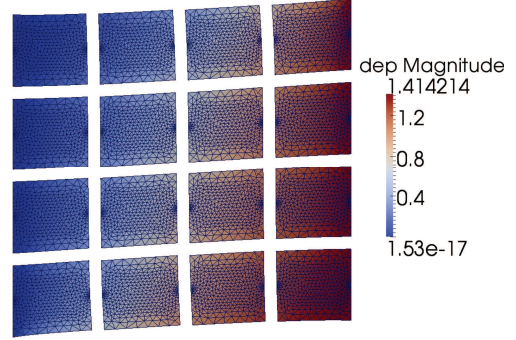
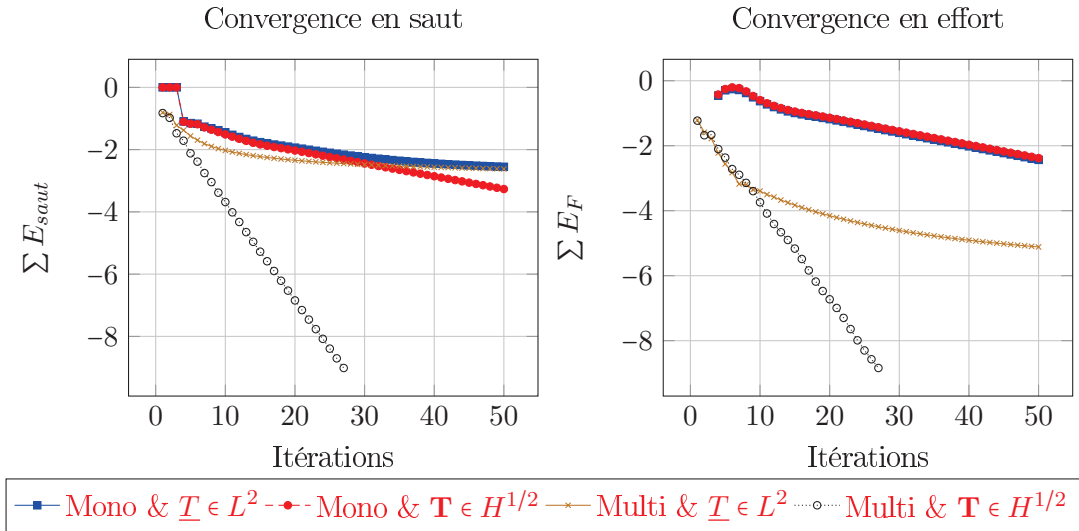


FIGURE 4.13 – Décomposition en sous-domaines.


 FIGURE 4.14 – Comparaison des convergences pour les versions monoéchelle et multiéchelle, chacune avec interefforts classiques et par représentation dans $H^{1/2}(\Gamma^s)$.

Tout d'abord, on constate que pour un problème avec autant de sous-domaines, les calculs sans problème grossier peinent à atteindre une valeur acceptable des critères de convergence en 50 itérations. Sur les quantités propres aux interfaces, les efforts, aucune différence n'est constatée entre les calculs des travaux. Sur les quantités des sous-domaines, représentées ici par les sauts de déplacements, une légère amélioration est visible à partir de 25 itérations. L'utilisation du produit scalaire de $H^{1/2}(\Gamma^s)$ conserve une pente constante alors que la version avec calcul dans $L^2(\Gamma^s)$ a tendance à saturer.

En ce qui concerne les versions multiéchelles, l'utilisation de quantités dans $H^{1/2}(\Gamma^s)$ est notablement plus efficace. Dès la dixième itération, la version avec un calcul dans $L^2(\Gamma^s)$ perd de la rapidité de convergence en équilibre. En ce qui concerne les quantités sur les sous-structures, cette même version tend vers la même valeur de saturation que pour le calcul monoéchelle.

Ainsi, l'utilisation d'un représentant des quantités d'effort dans $H^{1/2}(\Gamma^s)$ couplée avec un

problème grossier rend la méthode plus précise (non saturante) et plus rapide que les choix classiques. Le calcul approché du produit scalaire de $H^{1/2}(\Gamma^s)$ pour les interfaces à maillage irréguliers est validé sur application mécanique par ces calculs.

Sur ces cas tests à interfaces parfaites, les applications ont montré que la méthode proposée dans ce document est :

- à taux de convergence indépendante du pas du maillage;
- extensible : à convergence indépendante du nombre de sous domaines;
- plus rapide et plus précise que les versions mixtes de décomposition de domaine utilisant des quantités dans $L^2(\Gamma^s)$;
- robuste vis-à-vis du découpage en sous domaines.

Avant de valider l'approche proposée pour les interface de contact, le paragraphe suivant ouvre le champ des applications aux problèmes en trois dimensions.

4.2.4 Vers une mise en œuvre tridimensionnelle

Le cas test utilisé pour cette validation en 3D est une version extrudée sur une longueur unitaire du cas “Gamma-shaped structure” présenté pour l’optimisation des paramètres. La déformée résultat et la décomposition en sous-domaines et interfaces font l’objet des figures 4.15, 4.16 et 4.17.

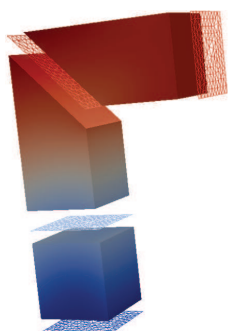


FIGURE 4.15 – Présentation de la décomposition du cas 3D : sous-domaines et interfaces.

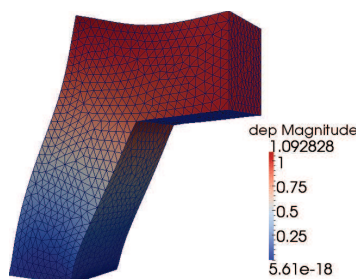


FIGURE 4.16 – Déformée résultat (échelle 1).

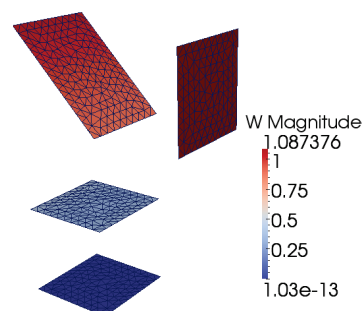


FIGURE 4.17 – Résultat en déplacement sur les interfaces.

Les interfaces de conditions aux limites apparaissent comme des interfaces entre sous-domaines. La valeur de la direction de recherche associée à ces interfaces de conditions aux limites est adaptée pour traiter les cas des déplacements et efforts imposés.

Les évolutions du saut de déplacement à l'interface 1 passant par la singularité géométrique sont tracées figure 4.18.

La vitesse de convergence semble dégradée par rapport au cas équivalent en 2D. On notera cependant que les critères utilisés n'étant pas normés, une comparaison de leurs évolutions au fil des itérations entre 2D et 3D est délicate.

Ces résultats permettent de constater le bon comportement de la méthode avec la version 3D du calcul approché du produit scalaire de $H^{1/2}(\Gamma^s)$. Ils valident également que l'utilisation d'un représentant des interefforts dans $H^{1/2}(\Gamma^s)$ permet de s'affranchir des problèmes d'oscillations parasites sur ce cas où l'approche de sur-discrétisation n'est pas suffisante. La précision et la vitesse de convergence sont meilleures qu'avec les choix classiques de

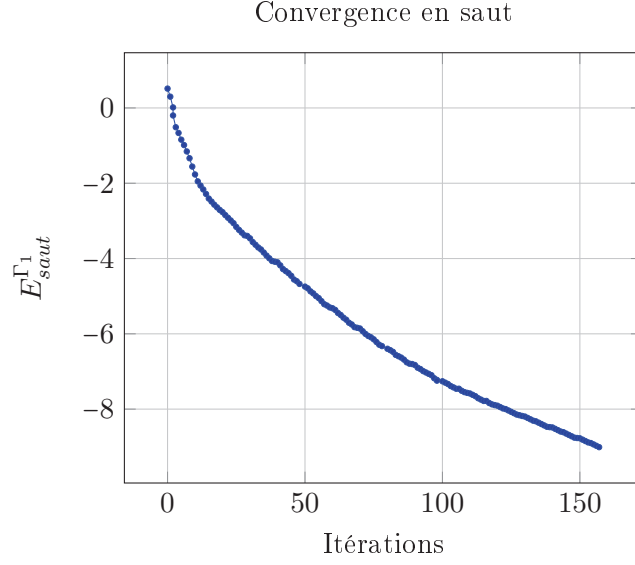


FIGURE 4.18 – Evolution du critère d'erreur en saut pour l'interface n°1

discrétisation. En outre, on ne constate pas de stagnation du critère. Enfin, on retrouve la robustesse vis-à-vis de la décomposition en sous-domaines qui avait été constatée sur les applications 2D.

4.3 Interface de contact

Après avoir constaté les avantages et les bonnes propriétés de la méthode proposée sur les interfaces parfaites, cette section présente les études portant sur les interfaces de contact. Le critère de convergence en saut de déplacement aux bords des sous-domaines a été adapté pour prendre en compte l'éventualité d'un décollement. Les écarts ne sont comptabilisés qu'aux nœuds pour lesquels un contact est avéré. Le critère en équilibre des efforts est inchangé puisqu'en cas de décollement, les efforts sont nuls.

4.3.1 Comparaison par rapport à la méthode de sous-discrétisation

La comparaison des résultats obtenus par la méthode proposée à ceux obtenus par une discrétisation classique est menée sur la géométrie décrite figure 4.19. Un petit bloc de matière est poussé en contact contre un bloc encastré à sa base. Les deux sous-domaines sont en matériau à comportement élastique linéaire avec $E = 1$ et $\nu = 0.3$. La condition de symétrie assure le blocage des mouvements de solide rigide.

La petite taille du problème autorise à vérifier que les paramètres optimaux α_{fact} et \mathbf{k}_{fact} déterminés sur des interfaces parfaites sont pertinents pour les interfaces de contact. La surface de réponse figure 4.20, obtenue après un balayage exhaustif d'une large plage de valeurs des paramètres, confirme les choix précédents. Les valeurs optimales seront conservées pour les études de cette section.

Pour le calcul avec la discrétisation classique dans $L^2(\Gamma^s)$, la sur-discrétisation du bord des sous-domaines introduit des nœuds et éléments supplémentaires comme illustré figure 4.21.

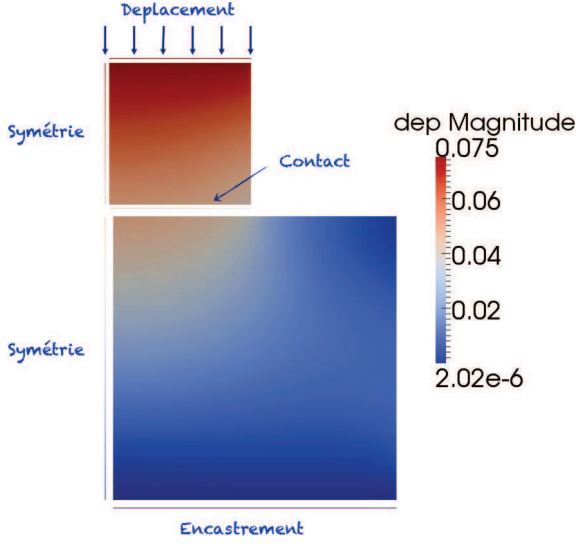


FIGURE 4.19 – Géométrie et conditions aux limites du cas test.

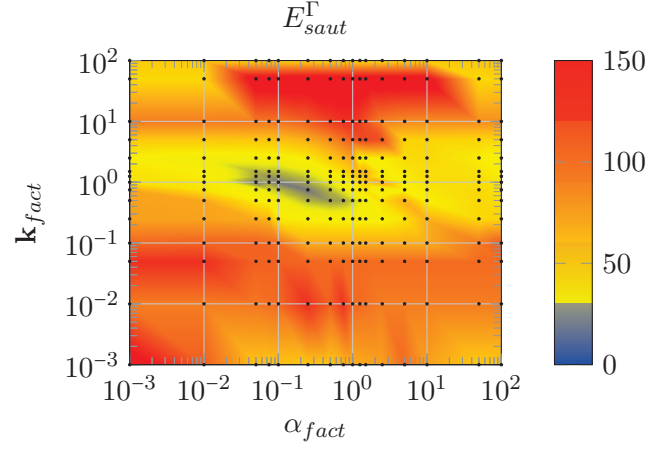
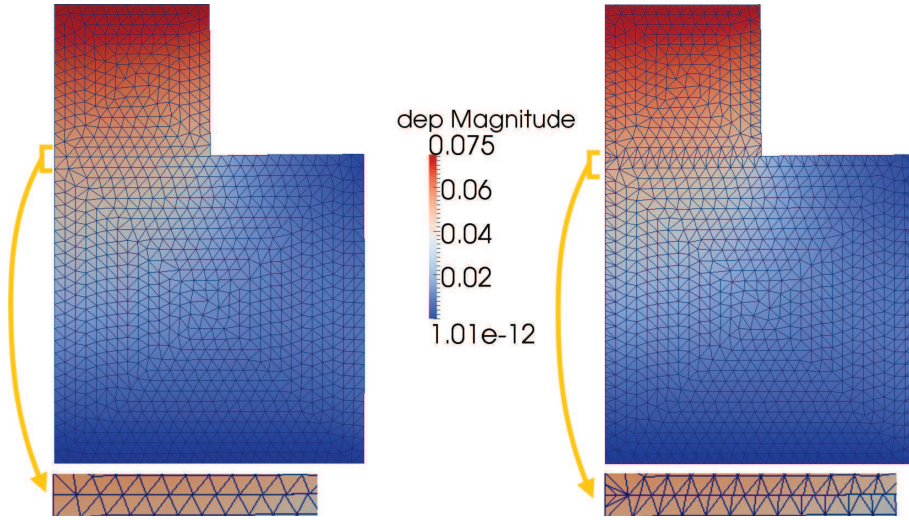

 FIGURE 4.20 – Validation des paramètres pour les interfaces de contact : arrêt du calcul pour un saut inférieur à 10^{-8} ou au bout de 150 itérations.


FIGURE 4.21 – Résultats en déplacement du problème convergé et comparaison des maillages à l'interface.

Le calcul est mené sur 150 itérations ou est arrêté dès que le critère de saut de déplacement est inférieur à 10^{-8} . Les évolutions des critères à chaque itération sont tracées pour les deux méthodes sur les graphes figure 4.22.

La résolution du problème de contact sur la globalité de l'interface, imposée par le formalisme de la méthode, est contraignante, en particulier d'un point de vue implémentation. Mais l'effort supplémentaire requis est récompensé par une vitesse de convergence largement supérieure à celle obtenue par la sur-discrétisation et le calcul des travaux dans $L^2(\Gamma^s)$. Que ce soit pour le saut de déplacement ou pour l'équilibre des efforts, l'utilisation d'un représentant dual dans $H^{1/2}(\Gamma^s)$ permet d'atteindre une bonne précision en moins d'une

vingtaine d'itérations et élimine la stagnation des critères.

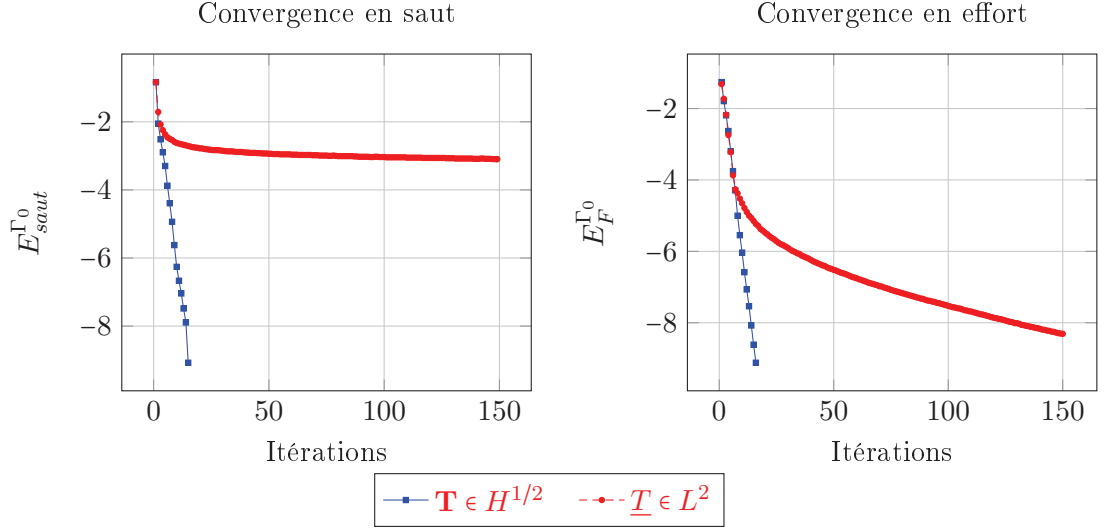


FIGURE 4.22 – Comparaison des convergences entre discrétisation traditionnelle et représentation des efforts par dualité dans $H^{1/2}(\Gamma^s)$

4.3.2 Prise en compte d'hétérogénéités dans la structure

Les structures mécaniques assemblées présentent des hétérogénéités, notamment dans les caractéristiques des matériaux qui composent les pièces. L'intérêt de la méthode proposée étant avéré pour les surfaces de contact dans les cas simples, les tests suivants ont pour objectif d'évaluer sa robustesse. Trois variantes du cas test précédent sont calculées :

- **Cas 0** : cas test présenté pour l'étude précédente.
- **Cas 1** : matériaux identiques, maillage irrégulier de l'interface ;
- **Cas 2** : rapport des modules d'Young des deux sous-domaines égal à 1000, maillage irrégulier de l'interface ;
- **Cas 3** : maillage identique au cas initial (régulier), rapport des modules d'Young des deux sous-domaines égal à 1000.

Les maillages et les résultats en déplacement pour chacun des cas sont présentés figure 4.23. Les directions de recherche de l'interface de contact sont adaptées à l'hétérogénéité des matériaux en choisissant le module d'Young du sous-domaine voisin (approximation de la raideur du sous-domaine adjacent). En numérotant les sous-domaines 1 et 2 :

$$\mathbf{k}^{(1)} = \mathbf{k}_{fact} \times \frac{E^{(2)}}{L_\Gamma} \quad \mathbf{k}^{(2)} = \mathbf{k}_{fact} \times \frac{E^{(1)}}{L_\Gamma} \quad (4.3.1)$$

Les calculs sont menés jusqu'à ce que le critère en saut de déplacement passe en dessous de 10^{-9} . Les convergences sont tracées figure 4.24. Aux résultats obtenus est superposée la courbe du cas 0 issue de l'étude présentée au paragraphe précédent.

Tout d'abord, on observe dans les trois cas un taux de convergence du même ordre de grandeur que celui constaté pour le cas de base. La rapidité de convergence et la précision obtenue sont des éléments robustes vis-à-vis des changements de régularité de maillage et des hétérogénéités dans la structure.

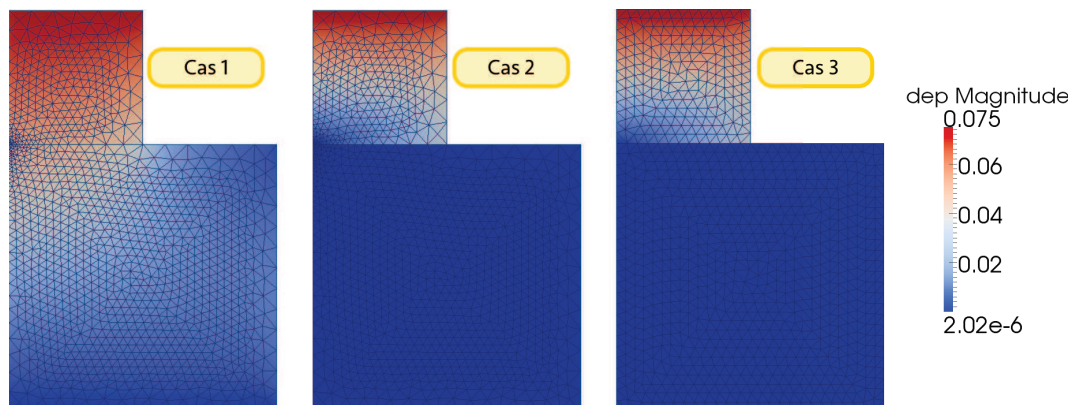


FIGURE 4.23 – Présentation des trois configurations testées.

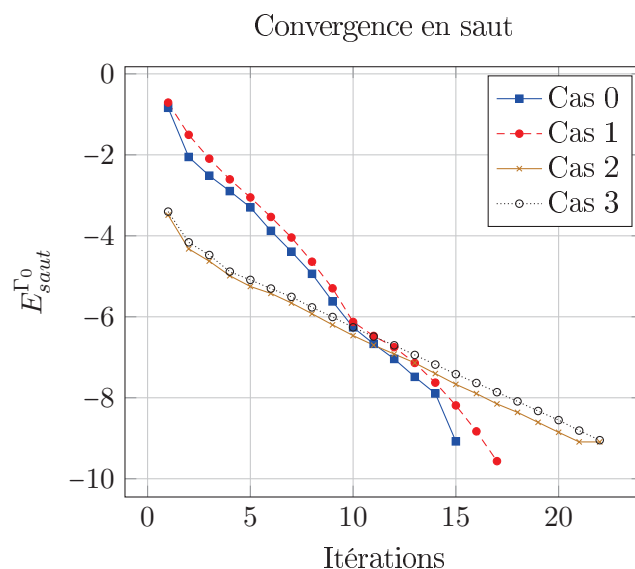


FIGURE 4.24 – Évolution du critère d'erreur en saut pour l'interface de contact dans les trois configurations

Ensuite, on observe une légère perte de vitesse de convergence pour les cas 2 et 3 dans lesquels les matériaux ne sont pas identiques. Cet écart peut être attribué à l'exacerbation, dans ce cas d'un rapport de 1000 sur les modules d'Young, de l'approximation qui est faite au niveau de l'estimation de la raideur de la structure en vis-à-vis. Une approximation plus précise, mais aussi plus coûteuse, du complément de Schur de la sous-structure pourrait lisser ces variations de vitesse de convergence.

Enfin, le calcul approché du produit scalaire de $H^{1/2}(\Gamma^s)$ pour les maillages irréguliers est également validé sur une interface de contact. L'indépendance de la convergence vis-à-vis de la finesse du maillage est retrouvée pour ces cas avec une interface autre que parfaite : à problème mécanique identique, les cas 0 et 1 d'un côté, et 2 et 3 de l'autre ont des courbes de convergences quasiment superposées.

4.3.3 Essai Brinell : comparaison à la théorie de Hertz

Ayant validé les aspects numériques liés aux interfaces de contact, les travaux présentés dans ce paragraphe visent à valider l'approche d'un point de vue physique. Le calcul porte sur un contact ponctuel (ou linéique) entre une bille (ou un cylindre) et un bloc de même matériau : $E = 216000 MPa$, $\nu = 0.3$. La géométrie, les conditions aux limites et le maillage de la zone de contact sont présentés figure 4.25. Afin d'assurer un maillage coïncident, le maillage du bloc est basé sur une projection des nœuds du maillage de la bille dans la zone de contact. Une surface plane, de petite taille par rapport au reste de la structure, est créée sur le haut de la bille, de sorte à pouvoir y appliquer une pression.

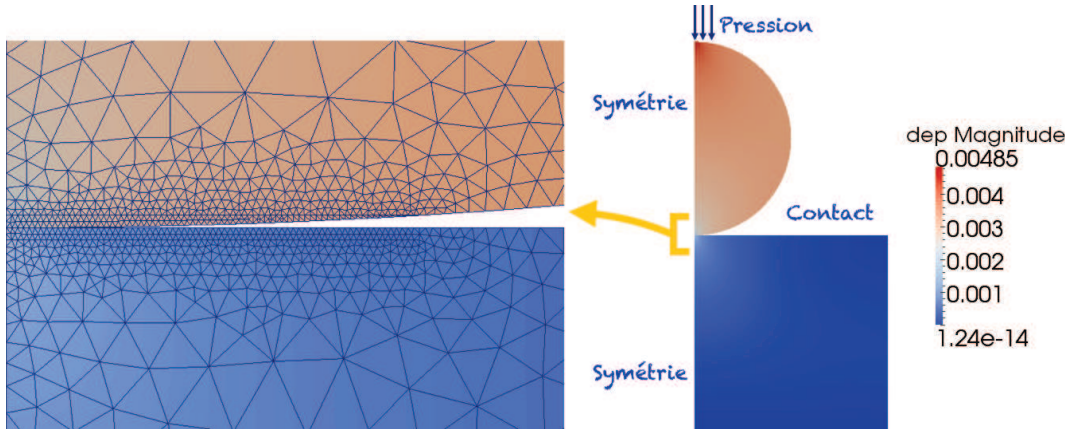


FIGURE 4.25 – Géométrie et maillage pour la simulation de l'essai Brinell.

Le modèle de Hertz [Hertz, 1881] sera pris comme référence :

$$a^2 = \frac{4PR}{\pi E^*} \quad (4.3.2)$$

où :

- a est la demi-surface de contact ;
- P est la pression appliquée ;
- R est défini par : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Dans le cas présent, $R_2 \rightarrow +\infty$
- E^* est défini par : $\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$

Les calculs sont menés pour des valeurs croissantes de pression appliquée en sommet de la bille et les résultats sont comparés aux calculs par la théorie de Hertz figure 4.26.

Les résultats sont jugés suffisamment proches de la référence pour valider l'approche proposée dans une situation mêlant interface de contact et maillage irrégulier.

Les éléments nécessaires à une application sur un cas complexe, plus proche de la problématique industrielle sont tous validés. La section suivante ouvre le champ de ces applications.

4.4 Premières applications au calcul d'une jonction boulonnée

Cette section présente la première mise en application de la méthode proposée dans ce document à un problème représentatif d'une application industrielle. Il s'agit d'un assemblage

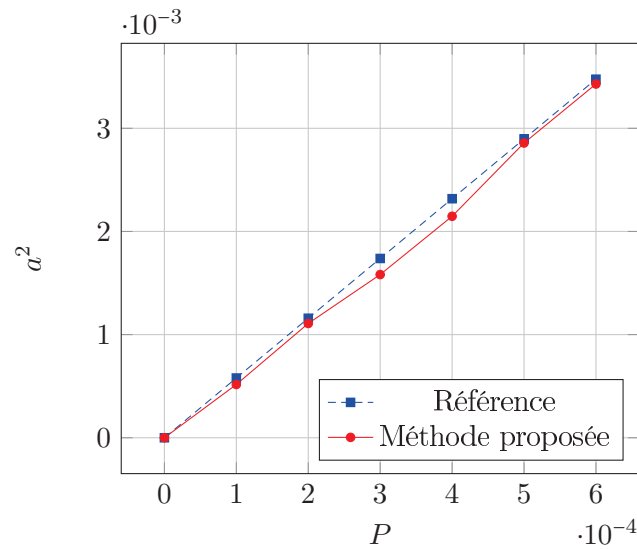


FIGURE 4.26 – Evolution du carré de la demi-surface de contact en fonction de la pression appliquée : comparaison de la méthode à la théorie de Hertz

de deux plaques par deux boulons sollicités en traction compression. L'étude est menée en 2D. Afin de représenter au mieux les interactions entre les pièces, une modélisation par superposition de maillage est mise en œuvre.

4.4.1 Principe de modélisation 2D

Le principe de l'approche de la modélisation est de transposer en 2D le comportement d'une jonction boulonnée. La difficulté principale résulte dans la capacité à relier une plaque traversée par une vis tout en modélisant le contact entre la vis et le fût.

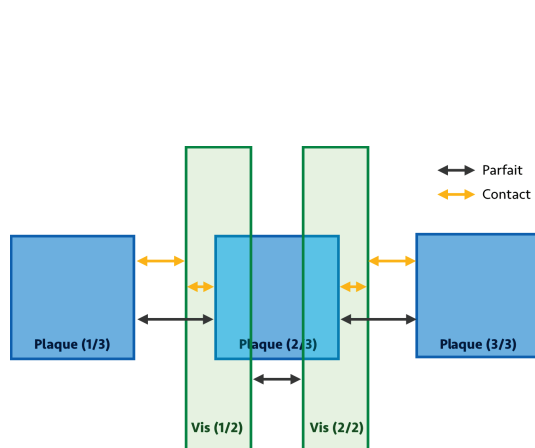


FIGURE 4.27 – Illustration du principe de la modélisation sur une géométrie simplifiée.

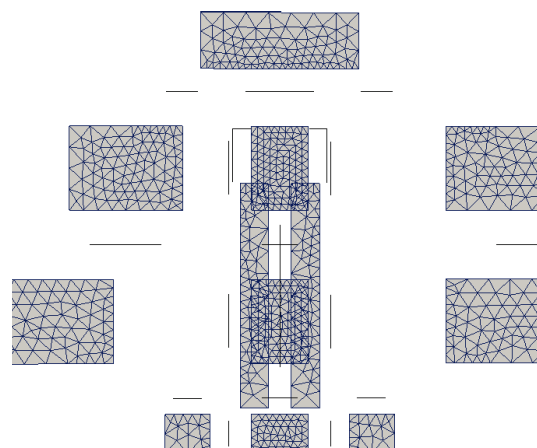


FIGURE 4.28 – Zoom de la version éclatée sur un boulon.

La plaque est alors découpée en trois parties :
— une partie en amont de la vis ;

- une partie en aval ;
- une partie superposée avec la vis représentant la zone trouée de la plaque.

Afin de simplifier la mise en données des interactions entre sous-structures, la vis est décomposée en 2 parties. Une première moitié interagissant avec les parties amont et le côté amont de la zone trouée de la plaque. Une deuxième moitié en interaction avec la partie aval et le côté aval de la partie trouée. Ce principe de modélisation est schématisé figure 4.27. Le maillage en éclaté avec les interfaces pour un boulon complet (vis et écrou) est fourni figure 4.28.

En appliquant cette modélisation aux deux boulons, l'assemblage est composé de 22 sous-structures interagissant via 41 interfaces. L'éclaté de la modélisation est présenté figure 4.29.

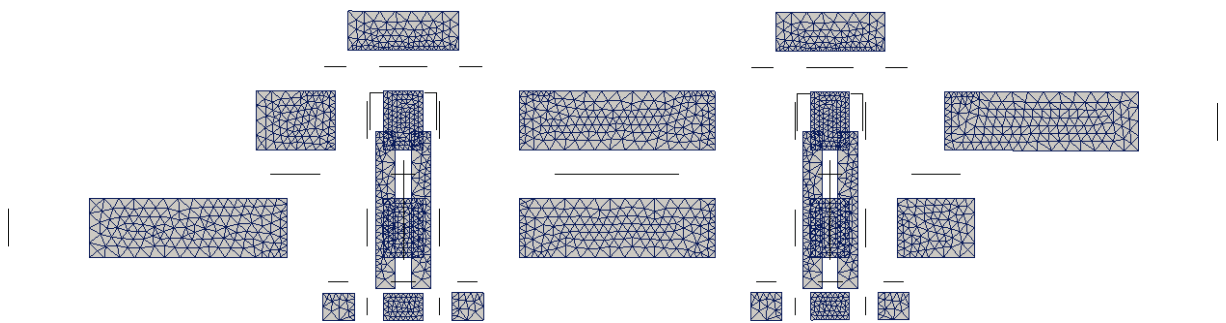


FIGURE 4.29 – Présentation d'une version éclatée de la modélisation d'une jonction à 2 boulons.

Sur l'interface située à l'extrême gauche de l'éclaté, une condition d'encastrement est imposée. A l'interface opposée de l'assemblage, sur la plaque supérieure, un déplacement est imposé. Deux calculs sont menés en changeant le signe du déplacement imposé de sorte à faire travailler l'ensemble une fois en traction, puis en compression.

La prétension dans la vis correspondant au serrage du boulon est prise en compte en imposant un jeu négatif dans l'interface de contact entre l'écrou et la plaque inférieure. Dans le but d'éprouver la robustesse de la méthode, et puisqu'il s'agit d'un problème linéaire, l'étape de serrage ne fait pas l'objet d'une première résolution servant d'initialisation à une étape de charge de la structure. La totalité des conditions est imposée en même temps.

4.4.2 Résultats de la simulation

S'agissant d'un cas de preuve de concept, le calcul est arrêté arbitrairement au bout de 100 itérations. Les déformées à l'échelle 1 des deux cas de chargement sont fournies figures 4.30 pour la traction et 4.31 pour la compression.

Au bout de 100 itérations, les critères en saut de déplacement et en équilibre des efforts d'une grande majorité des interfaces sont en dessous de 10^{-5} pour les deux chargements. La modélisation 2D de l'assemblage permet de rendre compte des phénomènes connus des jonctions boulonnées. Les déformées suggèrent que les vis travaillent en cisaillement. Bien qu'exagérée par une sollicitation sans doute trop importante, la déformée est cohérente avec les observations expérimentales sur coupons de jonctions. On retrouve par exemple le décollement des plaques en amont et en aval des vis pour le cas de la traction. Enfin les interfaces de contact se comportent comme attendu dans les deux cas de sollicitations.

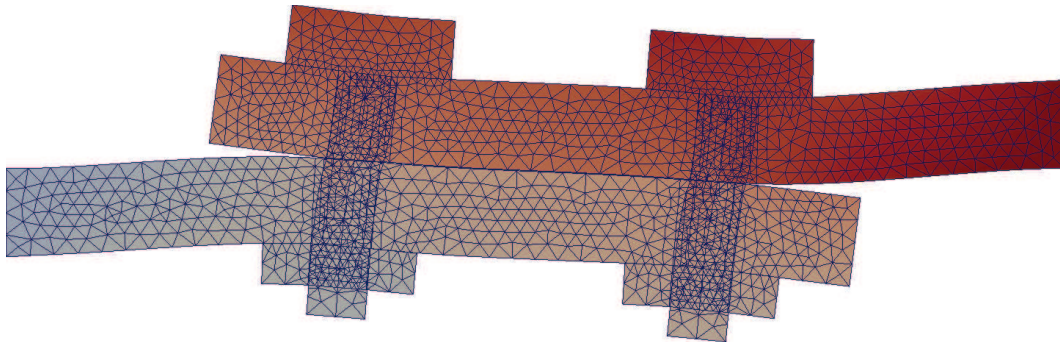


FIGURE 4.30 – Résultats pour une sollicitation de type traction.

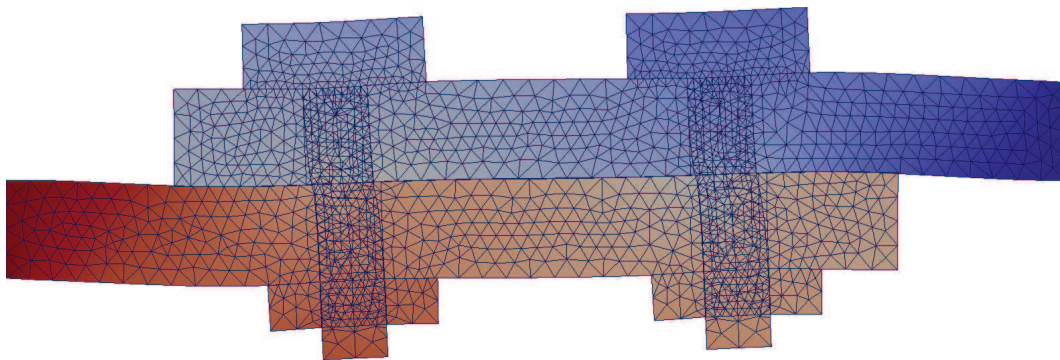


FIGURE 4.31 – Résultats pour une sollicitation de type compression.

Ces résultats encourageants soulignent une nouvelle fois l'intérêt d'utiliser une représentation des interefforts dans $H^{1/2}(\Gamma^s)$. La robustesse de la méthode, la polyvalence offerte par son cadre formel, sa vitesse de convergence et sa précision sont des atouts indéniables pour le traitement de grands problèmes de simulation d'assemblages industriels.



Conclusion

L'augmentation du nombre de simulations numériques du comportement de structures pour la conception et la certification des pièces aéronautiques impose le développement de nouvelles stratégies de modélisation robustes et efficaces. Les dernières années ont vu le développement de méthodes de résolution des problèmes de mécanique basées sur les méthodes de décomposition de domaine. Elles ouvrent la porte à la résolution plus rapide de problèmes à grand nombre de degrés de liberté, en exploitant les nouvelles architectures informatiques des super-calculateurs.

Basées sur une résolution en déplacement ou sur l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange pour imposer la continuité de déplacement à l'interface, les premières méthodes utilisées permettent de traiter efficacement un problème déjà discrétisé. Les sous-domaines sont alors reliés par des interfaces au comportement parfait. L'application de ces méthodes à la modélisation du comportement d'une seule pièce, sans être courante dans l'industrie, est atteignable par les calculateurs avancés. Leur maturité a en effet permis aux éditeurs de logiciels de modélisation par éléments finis de les mettre à disposition. Dès lors qu'on souhaite traiter des incompatibilités de discrétisation ou bien un lien entre sous-domaines plus complexe, on est contraint de se tourner vers des méthodes plus récentes introduisant des raccords exprimés sous forme faible au niveau continu. Plus délicates dans leur implémentation, ces méthodes offrent l'avantage de pouvoir traiter des problèmes qui ont été décomposés au niveau continu, avant d'avoir été discrétisés. Parmi ces méthodes, plusieurs ingrédients ont été empruntés pour proposer une nouvelle approche visant la simulation de grands assemblages.

La méthode proposée est une méthode mixte, exprimant les raccords à l'interface par une condition faisant intervenir des quantités cinématiques et des quantités duales. L'utilisation de la dualité $H^{1/2}(\Gamma) - H^{-1/2}(\Gamma)$ sur les quantités d'interface permet, en appliquant le théorème de Riesz, de ne traiter que des quantités homogènes à des déplacements sur l'interface. Le cadre mathématique ainsi obtenu est avantageux pour la discrétisation du problème : les mêmes espaces discrets sont utilisés pour les quantités cinématiques et pour les quantités d'effort. Ces derniers étant obtenus par trace des espaces utilisés pour les déplacements des sous-domaines, aucune incompatibilité n'est introduite dans le cas de discrétisations

conformes entre sous-domaines. Les comportements d'interfaces sont reformulés en utilisant le représentant de l'intereffort introduit par le choix de dualité. Les formulations obtenues (parfait, élastique, contact) sont globales par interface. Leur résolution est ainsi plus délicate à implémenter mais bénéficie d'une meilleure prise en compte du comportement des interfaces comme entités mécaniques. À la manière d'un préconditionneur pour l'interface, la dualité choisie offre donc un cadre bénéfique pour la résolution des problèmes régissant le lien entre les sous-domaines. Afin d'assurer l'extensibilité de la méthode, un problème grossier, sur l'ensemble des interfaces, est introduit. Il ne porte que sur les composantes à grandes longueurs d'onde des quantités d'interface. Sa formulation et sa résolution offrent un compromis bénéfique entre coût de calcul supplémentaire dû à sa résolution, et gain en terme de performance globale de la méthode.

Bénéficier des avantages présentés par la méthode proposée impose de calculer explicitement le produit scalaire de $H^{1/2}(\Gamma)$ qui présente une pseudo-singularité. Elle peut être levée par des changements de variables sophistiqués alourdissant l'implémentation. Un compromis entre temps de calcul et précision a été proposé et validé pour l'approximation de ce produit scalaire. Simple à coder et à calculer, il est également valable pour des discrétisations non-uniformes sur l'interface. L'expression proposée pour les problèmes 2D a été étendue au problème 3D et testée avec succès sur un des cas de mise en œuvre de la méthode.

Les performances de l'approche proposée ont été mesurées sur une batterie de cas tests choisis pour mettre à l'épreuve sa robustesse. De l'interface parfaite traversant une singularité géométrique au problème à grand nombre de sous-domaines, en passant par les discrétisations irrégulières de l'interface, le bon comportement de la méthode est mis en évidence. Pour un jeu de paramètres déterminé comme optimal et applicable à plusieurs types de modélisation, le taux de convergence a été démontré indépendant de la finesse de la discrétisation grâce à la dualité choisie. Il est également indépendant du nombre de sous-domaines grâce au problème grossier. Le traitement des interfaces de contact a permis, après confrontation à des solutions analytiques, d'aboutir à la simulation d'un modèle d'assemblage complexe illustrant la robustesse et la polyvalence de la méthode proposée.

Les développements présentés dans ce document ont permis d'amener la méthode à un niveau de maturité suffisant pour démontrer l'intérêt et la possibilité de l'appliquer sur des problèmes industriels de grands assemblages complexes. Ils pourraient être complétés sur plusieurs aspects. D'un point de vue théorique, d'abord, les démonstrations génériques s'inspirant de travaux issus de la communauté des mathématiques appliquées concernant la stabilité et la convergence, notamment leur indépendance au pas du maillage, feraient s'évanouir tout doute pouvant subsister après les mises en évidence sur cas d'applications présentées dans ce document. D'un point de vue plus pratique, un test de performance détaillé sur des cas à grands nombres de degrés de liberté permettrait d'avoir une estimation précise des temps de calculs. Même s'il n'y a que très peu de place pour le doute suite aux mises en œuvre présentées dans ce document, l'intérêt serait en particulier de chiffrer le ratio entre surcoût du calcul initial des matrices de masse de $H^{1/2}(\Gamma)$ et gain en itérations par rapport aux approches plus traditionnelles. À titre d'exemple, un cas industriel d'assemblage complexe, mêlant non-linéarités matériaux et interfaces de contact, serait bénéfique pour la présentation des performances et de la robustesse de la méthode.

Enfin, pour un transfert facilité vers une utilisation dans l'industrie par les calculateurs des bureaux d'études, un travail de simplification et d'automatisation des mises en données et choix des paramètres sera nécessaire. En ce qui concerne le cas des sous-domaines dont les maillages sont incompatibles, il serait possible d'adapter un lien de type Mortar à

la dualité proposée. Entre sous-domaines et interface, aucune difficulté théorique majeure n'empêche d'explorer cette piste. En revanche, nous soulignons que pour ces problématiques, l'approche consistant à se donner les moyens d'avoir un maillage à la hauteur des ambitions de modélisations est plus efficace que le développement de rustine palliant des choix parfois trop guidés par la pratique. Ainsi, remailler une structure sur la base uniquement d'un maillage existant et selon un critère de calcul d'erreur éléments finis est une pratique de plus en plus courante dans les travaux de recherche développant des méthodes numériques pour les applications industrielles. De la même façon, les problématiques d'évaluation de la convergence de la méthode pourraient bénéficier de l'estimation d'erreur sur la quantité d'intérêt recherchée par la modélisation. Enfin, en s'inspirant des dernières architectures informatiques hétérogènes auxquelles les méthodes numériques sont intimement liées, le spectre et la taille des problèmes non-linéaires pour les applications industrielles se retrouveraient élargis en imbriquant, à l'échelle maximisant l'efficacité de chacune, diverses méthodes numériques adaptées aux problèmes de mécanique.



Bibliographie

- ADAMS, R. (1975). *Sobolev Spaces*, volume 65 de *Pure and Applied Mathematics*. New York Academic Press.
- ADAMS, R. (2003). *Sobolev Spaces, Second Edition*, volume 140 de *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press.
- ANDRÄ, H. et SCHNACK, E. (1997). Integration of singular galerkin-type boundary element integrals for 3D elasticity problems. *Numer. Math.*, 76:143–165.
- BEN BELGACEM, F. (1999). The mortar finite element method with lagrange multipliers. *Numer. Math.*, 84:173–197.
- BEN BELGACEM, F. et MADAY, Y. (1997). The mortar element method for three dimensional finite elements. *Modél. Math. Anal. Numér.*, 31:289–302.
- BEN DHIA, H. (1998). Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode arlequin. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 326:899–904.
- BEN DHIA, H. et RATEAU, G. (2001). Analyse mathématique de la méthode arlequin mixte. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 332:649–654.
- BERNARDI, C., MADAY, Y. et RAPETTI, F. (2005). Basics and some applications of the mortar element method. *GAMM-Mitt*, 28:97–123.
- BERNARDI, C., REBOLLO, T. C. et VERA, E. C. (2008). A FETI method with a mesh independant condition number for the iteration matrix. *Comput. Methods Appl. Mech and Engrg.*, 197:1410–1429.
- BERNARDI, C., REBOLLO, T. C., VERA, E. C. et CORONIL, D. F. (2009). A posteriori error analysis for two non-overlapping domain decomposition techniques. *Appl. Num. Math.*, 59:1214–1236.

-
- BONNET, M. et FRANGI, A. (2006). *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*. Les éditions de l'école Polytechnique.
- BOUCARD, P.-A. (1996). *Approche à grand incrément de temps en grandes transformations*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- BOUCARD, P.-A., LADEVÈZE, P., POSS, M. et ROUGÉE, P. (1997). A nonincremental approach for large displacement problems. *Computer and Structures*, 64:499–508.
- BOUCHALA, J., DOSTÁL, Z. et SADOWSKÁ, M. (2008). Scalable BETI for variational inequalities. In LANGER, U., DISCACCIATI, M., KEYES, D., WIDLUND, O. et ZULEHNER, W., éditeurs : *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVII*, volume 60 de *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, pages 167–174. Springer Berlin Heidelberg.
- BREZZI, F. et FORTIN, M. (1991). *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer.
- CAIGNOT, A. (2009). *Prédiction par essais virtuels de l'amortissement dans les structures spatiales*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- CASAS, E. et RAYMOND, J.-P. (2006). The stability in $W^{s,p}(\Gamma)$ spaces of L^2 -projections on some convex sets. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 27:117–137.
- CHACÓN VERA, E. (2009). A continuous framework for FETI-DP with a mesh independent condition number for the dual problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(30–32):2470 – 2483.
- CHAMPANEY, L. (1996). *Une nouvelle approche modulaire pour l'analyse d'assemblages de structures tridimensionnelles*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- CHAMPANEY, L. (2012). A domain decomposition method for studying the effects of missing fasteners on the behavior of structural assemblies with contact and friction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 205–208(0):121 – 129.
- CIARLET, P. (1979). *The finite element method for elliptic problems*. North Holland.
- COGNARD, J., LADEVÈZE, P. et TALBOT, P. (1999). A large time increment approach for thermo-mechanical problems. *Advances in Engineering Software*, 30(9–11):583 – 593.
- COOLS, R. (1999). Monomial cubature rules since “Stroud” : a compilation – part 2. *J. Comput. Appl. Math.*, 112:21–27.
- COOLS, R. (2003). An encyclopaedia of cubature formulas. *J. Complexity*, 19:445–453.
- COOLS, R. et RABINOWITZ, P. (1993). Monomial cubature rules since “Stroud” : a compilation. *J. Comput. Appl. Math.*, 48:309–326.
- COTTLE, R., PANG, J. et STONE, R. (2009). *The Linear Complementarity Problem*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- DAUTRAY, R. et LIONS, J. (1987). *Analyse mathématique et calcul numérique*. Masson.
- DENG, Q. (2004). An optimal parallel nonoverlapping domain decomposition iterative procedure. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 41-3:964–982.

-
- DOBIÁŠ, J., PTÁK, S., DOSTÁL, Z. et VONDRÁK, V. (2010). Total FETI based algorithm for contact problems with additional non-linearities. *Advances in Engineering Software*, 41(1):46 – 51.
- DOSTÁL, Z., HORÁK, D. et KUČERA, R. (2006). Total FETI—an easier implementable variant of the feti method for numerical solution of elliptic pde. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 22(12):1155–1162.
- DOSTÁL, Z., HORÁK, D., KUČERA, R., VONDRÁK, V., HASLINGER, J., DOBIÁŠ, J. et PTÁK, S. (2005). FETI based algorithms for contact problems : scalability, large displacements and 3d coulomb friction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(2–5):395 – 409.
- DOSTÁL, Z., KOZUBEK, T., HORYL, P., BRZOBOHATÝ, T. et MARKOPOULOS, A. (2010). A scalable TFETI algorithm for two-dimensional multibody contact problems with friction. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(2):403 – 418.
- DUFFY, M. (1982). Quadrature over a pyramid or cube of integrands with a singularity at a vertex. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19:1260–1262.
- DUREISSEIX, D. (1997). *Une Approche Multi-échelle pour les Calculs de Structures sur Ordinateur à Architecture Parallèle*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- DUREISSEIX, D. et FARHAT, C. (2001). A numerically scalable domain decomposition method for the solution of frictionless contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(12):2643–2666.
- ERICHSEN, S. et SAUTER, S. (1998). Efficient automatic quadrature in 3-D galerkin BEM. *Comput. Methods Appl. Mech and Engrg.*, 157:215–224.
- FARHAT, C., LESOINNE, M., LE TALLEC, P., PIERSON, K. et RIXEN, D. (2001). FETI-DP : a dual-primal unified FETI method - part i : a faster alternative to the two-level feti method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 50:1523–1544.
- FARHAT, C., LESOINNE, M. et PIERSON, K. (2000). A scalable dual-primal domain decomposition method. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 7:687–714.
- FARHAT, C., MANDEL, J. et ROUX, F. (1994). Optimal convergence properties of the FETI domain decomposition method. *Comput. Methods Appl. Mech and Engrg.*, 115:365–385.
- FARHAT, C. et ROUX, F. (1994). The dual schur complement method with well-posed local neumann problems. *Contemporary Mathematics*, 157:193–201.
- FARHAT, C. et ROUX, F. (2000). A method of finite tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 184:333–374.
- FRANGI, A., NOVATI, G., SPRINGHETTI, R. et ROVIZZI, M. (2002). 3D fracture analysis by the symmetric galerkin BEM. *Comput. Mech.*, 28:220–232.
- GANDER, M.-J., JAPHET, C., MADAY, Y. et NATAF, F. (2005). A new cement to glue nonconforming grids with Robin interface conditions : The finite element case. In *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*, volume 40 de *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, pages 259–266. Springer Berlin Heidelberg.

-
- GENDRE, L. (2009). *Approche Globale/Locale non-intrusive : application aux structures avec plasticité locale*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- GLOWINSKI, R. (1984). *Numerical Methods or Nonlinear Variational Problems*. Springer Series in Computational Physics. Springer.
- GOSSELET, P. (2003). *Méthodes de décomposition de domaine et méthodes d'accélération pour les problèmes multichamps en mécanique non-linéaire*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie.
- GOSSELET, P. et REY, C. (2006). Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Arch. Comput. Meth. Engng.*, 13:515–572.
- GRISVARD, P. (1992). *Singularities in Boundary Value Problems*. Recherches en mathématiques appliquées. Masson.
- HAURET, P. et LE TALLEC, P. (2007). A discontinuous stabilized mortar method for general 3D elastic problems. *Comput. Methods Appl. Mech. and Engrg.*, 196:4881–4900.
- HAURET, P. et ORTIZ, M. (2006). BV estimates for mortar methods in linear elasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. and Engrg.*, 195:4783–4793.
- HERTZ, H. (1881). Über die berührung fester elastischer körper (sur le contact entre corps élastiques). *J. für reine und angewandte Mathematik*, 92:156–171.
- KERFRIDEN, P. (2008). *Stratégie de décomposition de domaine à trois échelles pour la simulation du délaminage dans les stratifiés*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie.
- KLAWONN, A. et RHEINBACH, O. (2005). A parallel implementation of dual-primal FETI methods for three dimensional linear elasticity using a transformation of basis. Rapport technique SM-E-601, Department of Mathematics, Universität Duisburg-Essen, Germany.
- KLAWONN, A. et WIDLUND, O. (2001). Feti and neumann-neumann iterative substructuring methods : Connections and new results. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 54(1):57–90.
- KLOUCEK, P., SORESENSEN, D. C. et WIGHTMAN, J. L. (2007). The approximation and computation of a basis of the trace space $H^{1/2}$. *J. Sci. Comp.*, 32:73–108.
- KUČERA, R., HASLINGER, J. et DOSTÁL, Z. (2005). The feti based domain decomposition method for solving 3d-multibody contact problems with coulomb friction. In *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*, volume 40 de *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, pages 369–376. Springer Berlin Heidelberg.
- LADEVÈZE, P. (1999). *Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Springer Verlag.
- LADEVÈZE, P. et DUREISSEIX, D. (1999). Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 327:1237–1244.
- LADEVÈZE, P., LOISEAU, O. et DUREISSEIX, D. (2001). A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 52:121–138.
-

-
- LADEVÈZE, P., NÉRON, D. et GOSSELET, P. (2006). On a mixed and multiscale domain decomposition method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196:1526–1540.
- LADEVEZE, P., NOUY, A. et LOISEAU, O. (2002). A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(43): 4869 – 4891.
- LADEVÈZE, P. et NOUY, A. (2003). On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28–30):3061 – 3087.
- LADEVÈZE, P., PASSIEUX, J.-C. et NÉRON, D. (2010). The latin multiscale computational method and the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21–22):1287 – 1296.
- LAMICHHANE, B. P., STEVENSON, R. P. et WOHLMUTH, B. I. (2005). Higher order mortar finite element methods in 3d with dual lagrange multiplier bases. *Numerische Mathematik*, 102(1):93–121.
- LE TALLEC, P., DE ROECK, Y. et VIDRASCU, M. (1991). Domain decomposition methods for large linearly elliptic three dimensionnal problems. *J. Comp. Appl. Math.*, 34:93–117.
- LEMKE, C. (1965). Bimatrix equilibrium points and mathematical programming. *Management Science*, 11:681–689.
- LIONS, J.-L., MADAY, Y. et TURINICI, G. (2001). Résolution d’edp par un schéma en temps pararéel: *C. R. Acad. Sci. Paris*, 332-1:661–668.
- LIONS, P. (1988). On the schwarz alternating method i. *First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, pages 1–42.
- LIONS, P. (1989). On the schwarz alternating method ii. *Second International Symposium on Domain Decomposition Methods*, pages 47–70.
- LIONS, P. (1990). On the schwarz alternating method iii : a variant for nonoverlapping subdomains. *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, pages 202–223.
- LLOYD, J. (2005). Fast Implementation of Lemke’s Algorithm for Rigid Body Contact Simulation. *In International Conference on Robotics and Automation*, pages 4538–4543.
- LOISEAU, O. (2001). *Une stratégie de calcul multiéchelle pour les tructures hétérogènes*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- MADAY, Y. et MAGOULÈS, F. (2007). Optimized schwarz methods without overlap for highly heterogeneous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(8):1541 – 1553.
- MADAY, Y. et RØNQUIST, E. (2008). Parallelization in time through tensor-product space–time solvers. *Comptes Rendus Mathématique*, 346(1–2):113 – 118.
- MANDEL, J. (1993). Balancing domain decomposition. *Comm. Appl. Num. Meth. Engrg.*, 9:233–241.

-
- MARCHAIS, J., REY, C. et CHAMOIN, L. (2014). Geometrically consistent approximations of the energy for the transition between nonlocal and local discrete models. *Computational Materials Science*, 85:280 – 294.
- MOËS, N., DOLBOW, J. et BELYTSCHKO, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 46:131–150.
- MURTY, K. (2010). *Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming*. Internet Edition.
- NOUY, A. (2003). *Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en temps et en espace pour le calcul de structures fortement hétérogènes*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- NOUY, A. (2010). A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied MEchanics and Engineering*, 199(23):1603–1626.
- OTTO, F.-C. et LUBE, G. (1999). A posteriori estimates for a non-overlapping domain decomposition method. *Computing*, 62:27–43.
- RAVIART, P. A. et THOMAS, J. M. (1977). Primal hybrid finite element methods for 2nd order elliptic equations. *Mathematics of Computation*, 31(138):pp. 391–413.
- RIXEN, D. et FARHAT, C. (1999). A simple and efficient extension of a class of substructure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(4):489–516.
- RIXEN, D., FARHAT, C. et GÉRARDIN, M. (1998). A two-step, two-field hybrid method for the static and dynamic analysis of substructure problems with non-conforming interfaces. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 154:229–264.
- RYCKELYNCK, D. et MISSOUM B., D. (2010). Multi-level a priori hyper-reduction of mechanical models involving internal variables. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 199:1134–1142.
- SAAD, Y. (2003). *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, second édition.
- SAAD, Y. et SCHULTZ, M. (1986). Gmres : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7(3):856–869.
- SAUTER, S. et SCHWAB, C. (1997). Quadrature for hp-Galerkin BEM in 3-d. *Numer. Math.*, 78:211–258.
- SCHWARZ, H. A. (1870). II. Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren. *Wolf J.* XV. 272-286. 1870 (1870).
- STEINBACH, O. (2003). *Stability Estimates for Hybrid Coupled Domain Decomposition Methods*, volume 1809 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer.
- TOMLIN, J. (1978). *Robust implementation of Lemke’s method for the linear complementarity problem*, volume 7 de *Mathematical Programming Studies*, pages 55–60. Springer Berlin Heidelberg.
-

-
- TOSELLI, A. et WIDLUND, O. (2005). *Domain decomposition methods - Algorithms and Theory*, volume 34 de *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer.
- TOUZEAU, J., CHIARUTTINI, V., FEYEL, F. et BEN DHIA, H. (2011). Approche multiéchelle Arlequin pour l'étude des structures composites stratifiées. *In 10e colloque national en calcul des structures*, Giens, France.
- TRANQUART, B. (2012). *Vers un matériaux virtuel virtuel pour l'optimisation qualitative d'une nouvelle famille de CMCs*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- VIOLEAU, D. (2007). *Une stratégie de calcul pour l'analyse à l'échelle "micro" des endommagements jusqu'à rupture des composites stratifiés*. Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de Cachan.
- WOHLMUTH, B. (2000). A mortar finite element method using dual spaces for the lagrange multiplier. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 38(3):989–1012.
- WOHLMUTH, B. (2001). *Discretization Methods and Iterative Solvers Based on Domain Decomposition*. Springer.
- WYART, E., DUFLOT, M., COULON, D., MARTINY, P., PARDOEN, T., REMACLE, J.-F. et LANI, F. (2008). Substructuring fe-xfe approaches applied to three-dimensional crack propagation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 215(2):626 – 638.
- ZIENKIEWICZ, O. et TAYLOR, R. (1989). *The finite element method*. Mc Graw-Hill Book Compagny.

Eléments d'analyse sur $H^{1/2}$ et le produit scalaire associé

A.1 Espaces de Sobolev fractionnaires $H^{1/2}(\partial\Omega)$ et $H^{-1/2}(\partial\Omega)$

Le dual topologique X' d'un espace vectoriel X est l'ensemble des fonctions continues à valeurs scalaires définies sur X , appelées fonctionnelles ou formes.

Théorème de représentation de Riesz : Soit X un espace de Hilbert. Une fonctionnelle x' linéaire sur X appartient à X' si et seulement s'il existe $x \in X$ tel que :

$$\forall y \in X, \quad x'(y) = \langle y, x \rangle_X.$$

Dans ce cas, x est unique et déterminé par $x' \in X'$, et : $\|x'\|_{X'} = \|x\|_X$.

Définition plus générale d'un espace de Sobolev Adams [2003] :

$$W^{m,p}(\Omega) \equiv \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ pour } 0 \leq |\alpha| \leq m\} \quad (\text{A.1.1})$$

avec $(m, p) \in \mathbb{N}^2$ et $D^\alpha u$ dérivée partielle au sens des distributions.

L'espace dual de $W^{m,p}(\Omega)$ est $W^{-m,p'}(\Omega)$ où :

$$p' = \begin{cases} \infty & \text{si } p = 1 \\ \frac{p}{p-1} & \text{si } 1 < p < \infty \\ 1 & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

A.1.1 Espaces d'ordre fractionnaire :

Les espaces d'ordre fractionnaire sont les espaces $W^{m,p}$ où m n'est pas un entier (mais un rationnel a priori). Afin de les définir, on construit par interpolation des échelles d'espaces intermédiaires entre deux espaces extrêmes comme $L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega)$ et $W^{m,p}(\Omega)$.

Les espaces de Besov constituent une de ces échelles. Ils se prêtent à la caractérisation des espaces de traces de fonctions de $W^{m,p}(\Omega)$ sur les frontières suffisamment régulières des domaines Ω . Ces espaces sont notés $B^{s,p,q}(\Omega)$ avec $0 < s < \infty$, $1 \leq p < \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$.

Définition de l'application trace : u , trace de U définie sur Ω , est le prolongement par continuité de U à $\partial\Omega$.

$$u = Tr(U) = U|_{\partial\Omega}$$

Théorème de Trace : Soient $1 < p < \infty$ et u fonction mesurable sur \mathbb{R}^n .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\exists U \in W^{m,p}(\mathbb{R}^{n+1})$ telle que u est la trace de U .
- (ii) $u \in B^{m-(1/p);p,p}(\mathbb{R}^n)$.

Application à la mécanique : Dans les applications à la mécanique, on travaille avec les espaces $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$, c'est à dire $m = 1$ et $p = 2$:

$$\left| \begin{array}{l} H^1(\Omega) \equiv W^{1,2}(\Omega) \equiv \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour } 0 \leq |\alpha| \leq 1\} . \\ \\ H^{-1}(\Omega) \equiv W^{-1,2}(\Omega) \\ \\ n \in 1, 2, 3, \text{ } u \text{ trace de } U \in W^{1,2}(\mathbb{R}^{n+1}) \text{ appartient à } B^{1/2;2,2}(\mathbb{R}^n) \end{array} \right.$$

Lemme : Pour $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $\forall q$, $B^{m;p,q}(\Omega) \neq W^{m,p}$ sauf dans le cas $p = q = 2$.
On en déduit :

Les traces des fonctions de $W^{1,2}(\mathbb{R}^{n+1}) = H^1(\Omega)$ sont dans $B^{1/2;2,2}(\mathbb{R}^n) = W^{1/2,2}(\partial\Omega) = H^{1/2}(\partial\Omega)$.

A.2 Normes et produits scalaires des espaces de Sobolev et les espaces fractionnaires

Définition de la norme des espaces $W^{m,p}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$ Adams [2003] :

$$\begin{aligned} \|u\|_{m,p} &= \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p} \text{ pour } 1 \leq p < \infty \\ \|u\|_{m,\infty} &= \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty \end{aligned} \quad (\text{A.2.1})$$

Définition de la norme des espaces $W^{m,p}(\Omega)$, $m \notin \mathbb{N}$ Adams [1975] : La construction alternative des espaces d'ordre fractionnaire par la méthode des traces fait intervenir la norme intrinsèque suivante :

$$\|u\|_{s,p} = \left[\|u\|_{m,p}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}} dx dy \right]^{\frac{1}{p}} \quad \begin{array}{l} \text{Pour } s = m + \sigma \\ \text{avec } m \in \mathbb{N} \\ \text{et } 0 < \sigma < 1. \end{array} \quad (\text{A.2.2})$$

Application à la mécanique Steinbach [2003] : On fixe $p = 2$. Pour $m = k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \quad (\text{A.2.3})$$

Pour $m = s$, $0 < s \in \mathbb{R}^n$, $s \notin \mathbb{N}$, on utilise la norme de Sobolev-Slobodeckii :

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^s(\Omega)} &= \left(\|u\|_{H^{[s]}(\Omega)}^2 + |u|_{H^s(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ |u|_{H^s(\Omega)} &= \left[\sum_{|\alpha|=[s]} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.4})$$

On travaille également sur la frontière fermée de Ω : $\Gamma = \partial\Omega$. Dans le cas où $m = s \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^s(\Gamma)} &= \left(\|u\|_{H^{[s]}(\Gamma)}^2 + |u|_{H^s(\Gamma)}^2 \right)^{1/2} \\ |u|_{H^s(\Gamma)}^2 &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n-1+2s}} ds_x ds_y \end{aligned} \quad (\text{A.2.5})$$

Produit scalaire associé Bernardi *et al.* [2008] : Le produit scalaire de $H^{1/2}(\Gamma)$ est donné par l'expression suivante :

$$(u, v)_{1/2, \Gamma} = \int_{\Gamma} u(x)v(x) dx + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^n} dx dy, \quad \forall u, v \in H^{1/2}(\Gamma) \quad (\text{A.2.6})$$

Dans le cas de $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$, un terme supplémentaire est à calculer :

$$(u, v)_{1/2, 00, \Gamma} = (u, v)_{1/2, \Gamma} + \int_{\Gamma} \frac{u(x)v(x)}{d(x, \partial\Gamma)} dx, \quad \forall u, v \in H_{00}^{1/2}(\Gamma) \quad d(x, \partial\Gamma) \text{ est la distance de } x \text{ à } \partial\Gamma.$$

A.3 Calcul approché du produit scalaire de $H^{1/2}$ pour les problèmes 3D

On s'intéresse ici à cette double intégrale sur la frontière dans le cas 3D. Afin, donc, de calculer : $(\underline{W}_E, \underline{T}_E)_{1/2, \Gamma_E}$, on introduit la discrétisation des quantités \underline{W}_E et \underline{T}_E en choisissant les **mêmes fonctions de formes** $\phi_i(\underline{x})$ pour les deux :

$$(\underline{W}_E, \underline{T}_E)_{1/2, \Gamma_E} = \left(\sum_i W_i \phi_i(\underline{x}), \sum_j T_j \phi_j(\underline{x}) \right)_{1/2, \Gamma_E} = \sum_j \sum_j W_i T_j (\phi_i(\underline{x}), \phi_j(\underline{x}))_{1/2, \Gamma_E}$$

Γ est discrétisée en N_{Γ} éléments triangulaires π_i , $1 \leq \pi_i \leq N_{\Gamma}$. Dans le cas d'une étude en 3D, ce sont des éléments de surface.

A.3.1 Traitement des termes du produit scalaire de $L^2(\Omega)$

La partie correspondant au produit scalaire de $L^2(\Omega)$ s'écrit :

$$\int_{\Gamma} \phi_i(\underline{x}) \phi_j(\underline{x}) d\underline{x}$$

En prenant en compte la discrétisation de Γ :

$$\sum_{k=1}^{N_\Gamma} \int_{\pi_k} \phi_i(\underline{x}_{|\pi_k}) \phi_j(\underline{x}_{|\pi_k}) d\underline{x}_{|\pi_k}$$

En utilisant les formules traditionnelles d'intégration par points de Gauss sur des triangles, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{N_\Gamma} \sum_{g=1}^{N_G} \omega^g \phi_i(x_1^g, x_2^g) \phi_j(x_1^g, x_2^g)$$

A.3.2 Traitement des termes singuliers

Les termes singuliers qu'on est amené à calculer sont de la forme :

$$\int_\Gamma \int_\Gamma \frac{(\phi_i(\underline{x}) - \phi_i(\underline{y}))(\phi_j(\underline{x}) - \phi_j(\underline{y}))}{|\underline{x} - \underline{y}|^d} d\underline{x} d\underline{y}$$

En prenant en compte la discrétisation de Γ :

$$\sum_{k=1}^{N_\Gamma} \sum_{l=1}^{N_\Gamma} \int_{\pi_k} \int_{\pi_l} f_{ij}(\underline{x}_{|\pi_l}, \underline{y}_{|\pi_k}) d\underline{x}_{|\pi_l} d\underline{y}_{|\pi_k},$$

où :

$$f_{ij}(\underline{x}_{|\pi_l}, \underline{y}_{|\pi_k}) = \frac{[\phi_i(\underline{x}_{|\pi_l}) - \phi_i(\underline{y}_{|\pi_k})][\phi_j(\underline{x}_{|\pi_l}) - \phi_j(\underline{y}_{|\pi_k})]}{|\underline{x}_{|\pi_l} - \underline{y}_{|\pi_k}|^d}.$$

Puis on utilise l'intégration par point de Gauss :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N_\Gamma} \sum_{l=1}^{N_\Gamma} \sum_{g=1}^{N_G} \sum_{h=1}^{N_G} \omega^g \omega^h f_{ij}((x_1^g, x_2^g), (y_1^h, y_2^h)) \\ & \sum_{k=1}^{N_\Gamma} \sum_{l=1}^{N_\Gamma} \sum_{g=1}^{N_G} \sum_{h=1}^{N_G} \omega^g \omega^h \frac{[\phi_i(x_1^g, x_2^g) - \phi_i(y_1^h, y_2^h)][\phi_j(x_1^g, x_2^g) - \phi_j(y_1^h, y_2^h)]}{\left| \begin{pmatrix} x_1^g \\ x_2^g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1^h \\ y_2^h \end{pmatrix} \right|^3} \end{aligned}$$

On distingue alors quatre cas :

1. π_k et π_l sont les mêmes ;
2. π_k et π_l ont une arête commune ;
3. π_k et π_l ont un sommet commun ;
4. π_k et π_l sont complètement disjoints.

La seule configuration pour laquelle le dénominateur s'annule est la numéro 1. Dans ce cas et lorsque les points de Gauss considérés pour l'intégration en \underline{x} et celle en \underline{y} sont les mêmes (Cf. figures A.4, cas A).

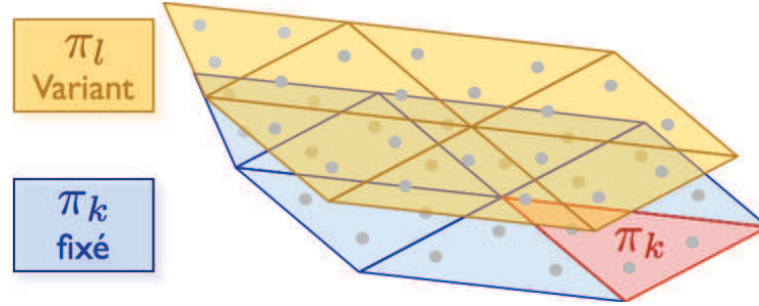


FIGURE A.1 – Présentation de la situation, variation sur les éléments

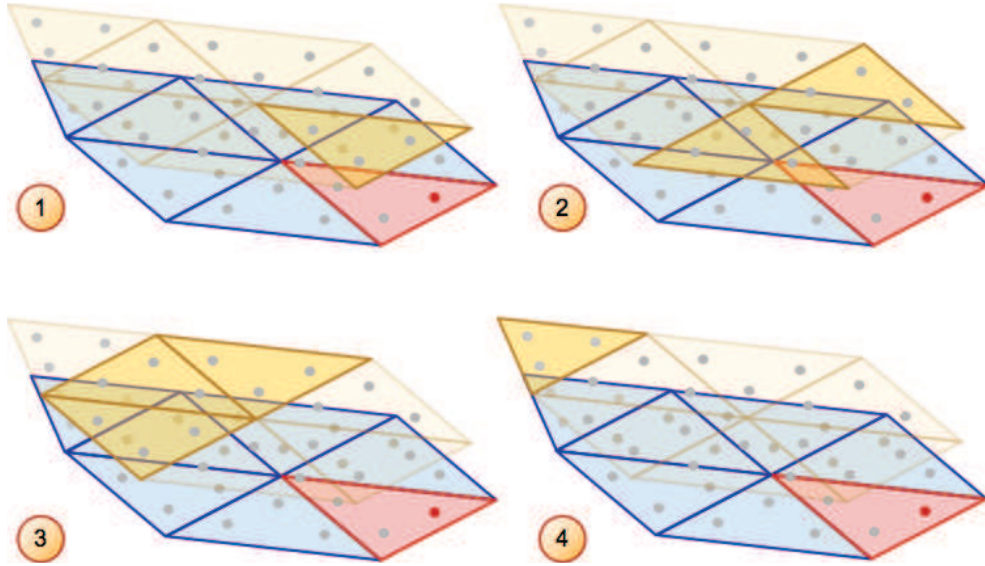


FIGURE A.2 – Les 4 cas

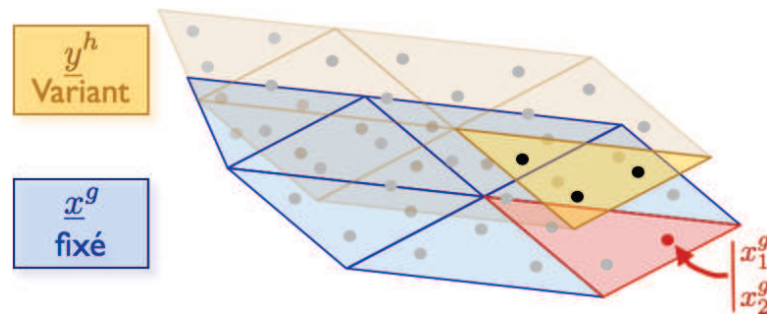


FIGURE A.3 – Présentation de la situation, variation sur les points de Gauss

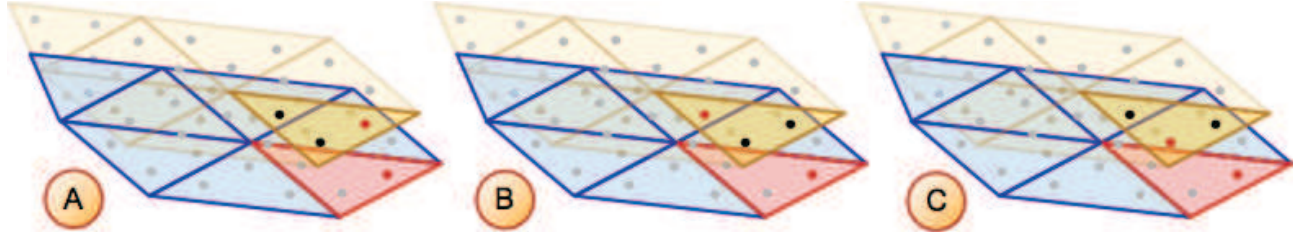


FIGURE A.4 – Les 3 cas

A.3.3 Bilan et approximation

Au final, le calcul du produit scalaire s'exprime par :

$$\begin{aligned}
 (\phi_i(\underline{x}), \phi_j(\underline{x}))_{1/2, \Gamma} &= \sum_{k=1}^{N_\Gamma} \sum_{g=1}^{N_G} \omega^g \phi_i(x_1^g, x_2^g) \phi_j(x_1^g, x_2^g) \\
 &+ \sum_{k=1}^{N_\Gamma} \sum_{l=1}^{N_\Gamma} \sum_{g=1}^{N_G} \sum_{h=1}^{N_G} \omega^g \omega^h \frac{[\phi_i(x_1^g, x_2^g) - \phi_i(y_1^h, y_2^h)][\phi_j(x_1^g, x_2^g) - \phi_j(y_1^h, y_2^h)]}{\left| \begin{pmatrix} x_1^g \\ x_2^g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1^h \\ y_2^h \end{pmatrix} \right|^3}
 \end{aligned}$$

On propose, sur la base du produit scalaire présenté pour les études en 2D dans [Bernardi et al. \[2009\]](#), l'approximation pour les études en 3D suivante :

$$\begin{aligned}
 (\phi_i(\underline{x}), \phi_j(\underline{x}))_{1/2, \Gamma} &= \sum_{k=1}^{N_\Gamma} \sum_{g=1}^{N_G} \omega^g \phi_i(x_1^g, x_2^g) \phi_j(x_1^g, x_2^g) \\
 &+ \sum_{k=1}^{N_\Gamma} \sum_{l=1}^{N_\Gamma} \sum_{g=1}^{N_G} \sum_{h=1, h \neq g}^{N_G} \omega^g \omega^h \frac{[\phi_i(x_1^g, x_2^g) - \phi_i(y_1^h, y_2^h)][\phi_j(x_1^g, x_2^g) - \phi_j(y_1^h, y_2^h)]}{\left| \begin{pmatrix} x_1^g \\ x_2^g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1^h \\ y_2^h \end{pmatrix} \right|^3}
 \end{aligned}$$

Etudes paramétriques sur la gamma-shaped structure

Cette annexe présente les résultats complémentaires de l'étude paramétrique sur la famille de cas test en forme de demi-portique. Les valeurs optimales pour la convergence de la méthode sont retrouvées indépendamment du facteur d'échelle de la structure et de la densité du maillage.

B.1 Facteur d'échelle 0.25

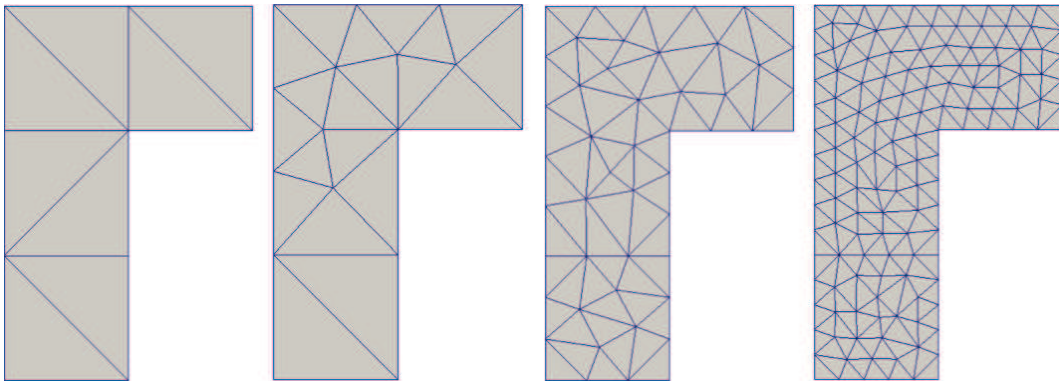


FIGURE B.1 – Maillages pour le facteur d'échelle 0.25. De gauche à droite, les tailles caractéristiques sont : 0.35, 0.2, 0.1, 0.05.

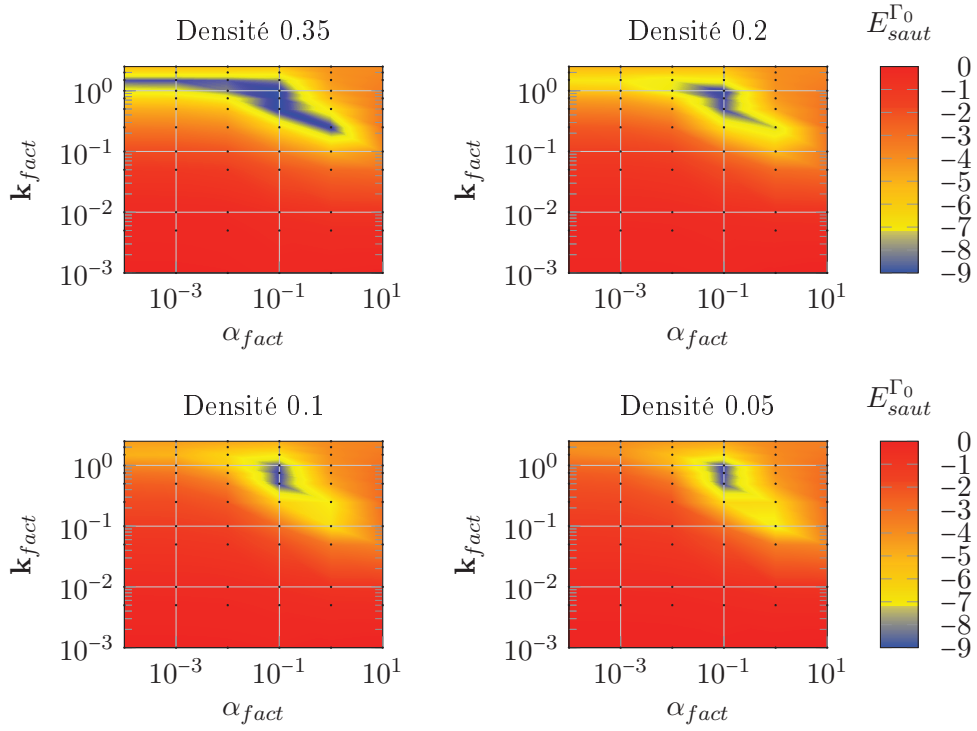


FIGURE B.2 – Résultats de l'étude paramétrique en saut pour le facteur d'échelle 0.25

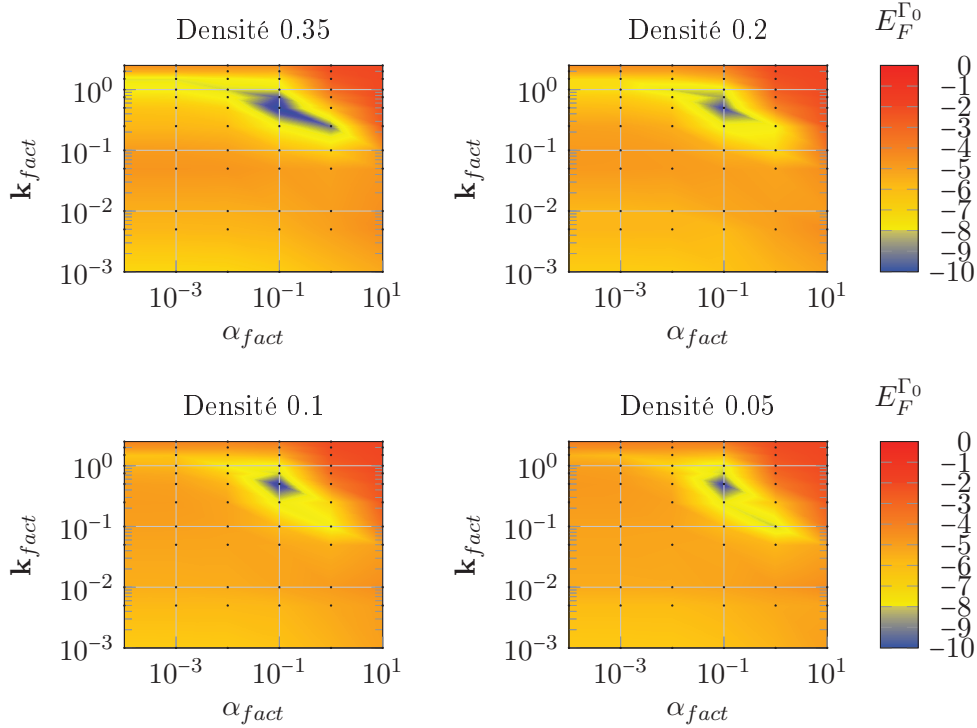


FIGURE B.3 – Résultats de l'étude paramétrique en effort pour le facteur d'échelle 0.25.

B.2 Facteur d'échelle 0.5

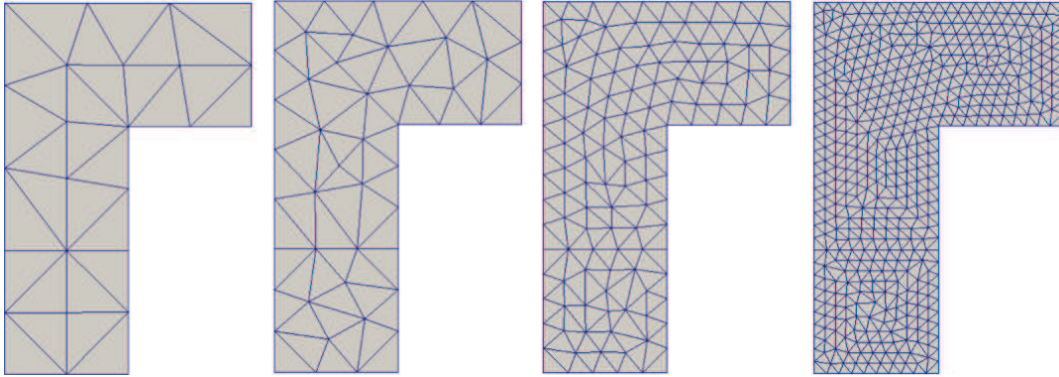


FIGURE B.4 – Maillages pour le facteur d'échelle 0.5. De gauche à droite, les tailles caractéristiques sont : 0.35, 0.2, 0.1, 0.05.

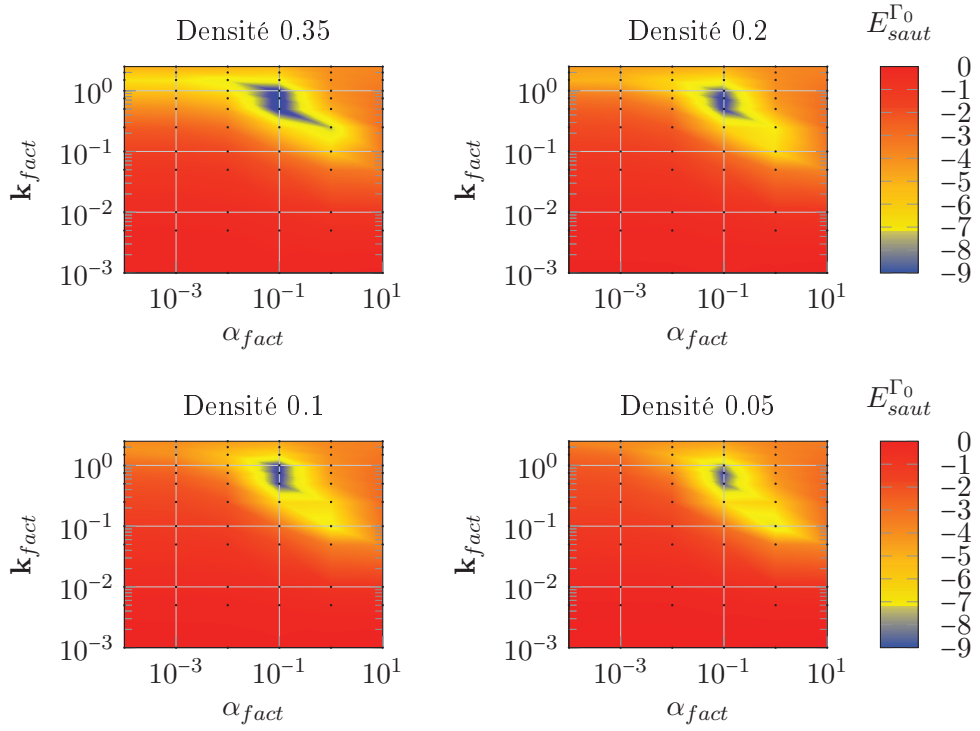


FIGURE B.5 – Résultats de l'étude paramétrique en saut pour le facteur d'échelle 0.5.

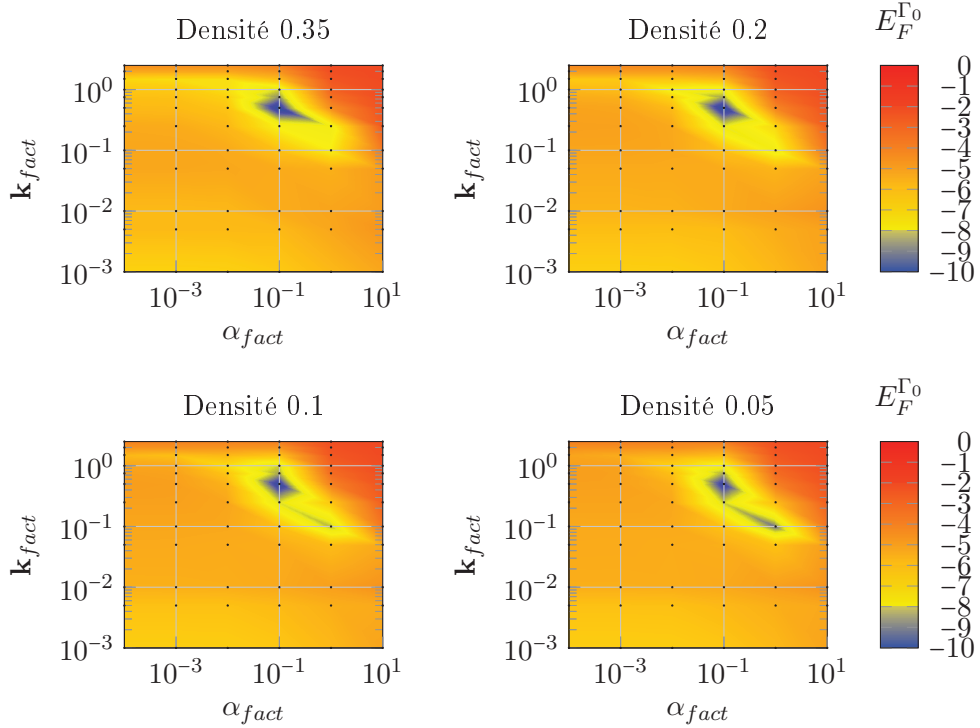


FIGURE B.6 – Résultats de l'étude paramétrique en effort pour le facteur d'échelle 0.5

B.3 Facteur d'échelle 2

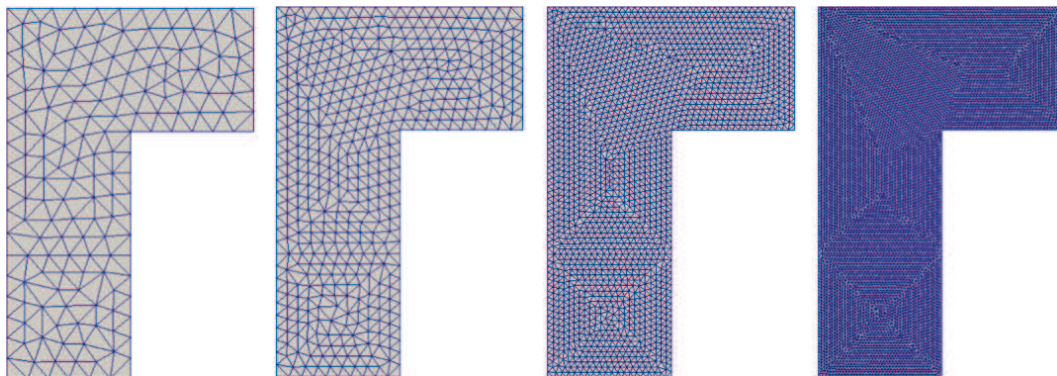


FIGURE B.7 – Maillages pour le facteur d'échelle 2. De gauche à droite, les tailles caractéristiques sont : 0.35, 0.2, 0.1, 0.05.

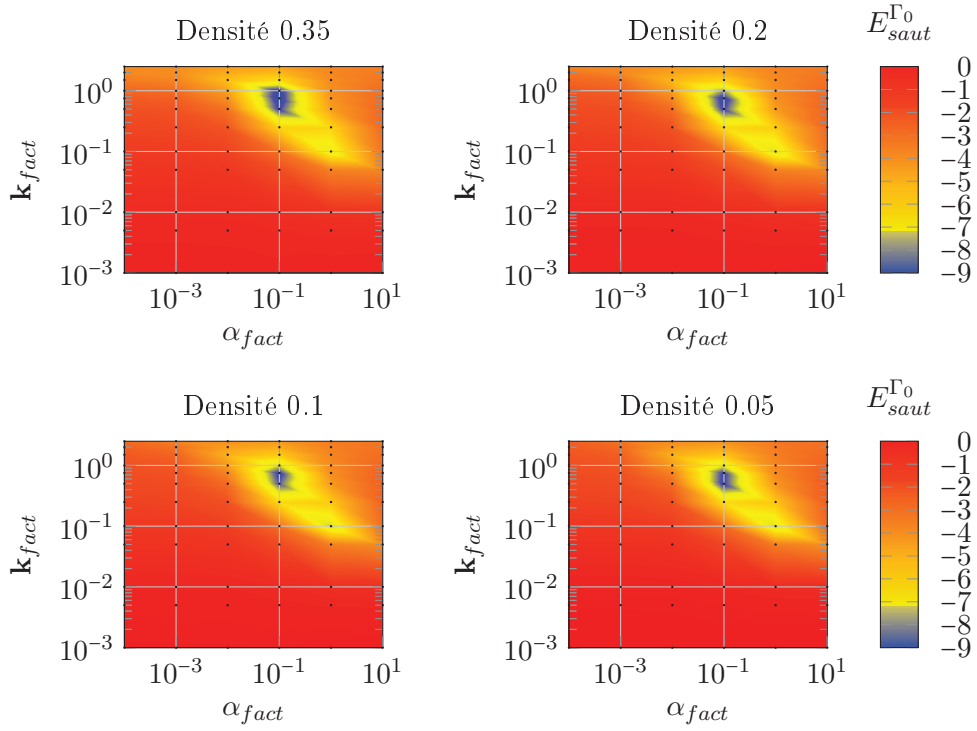


FIGURE B.8 – Résultats de l'étude paramétrique en saut pour le facteur d'échelle 2.

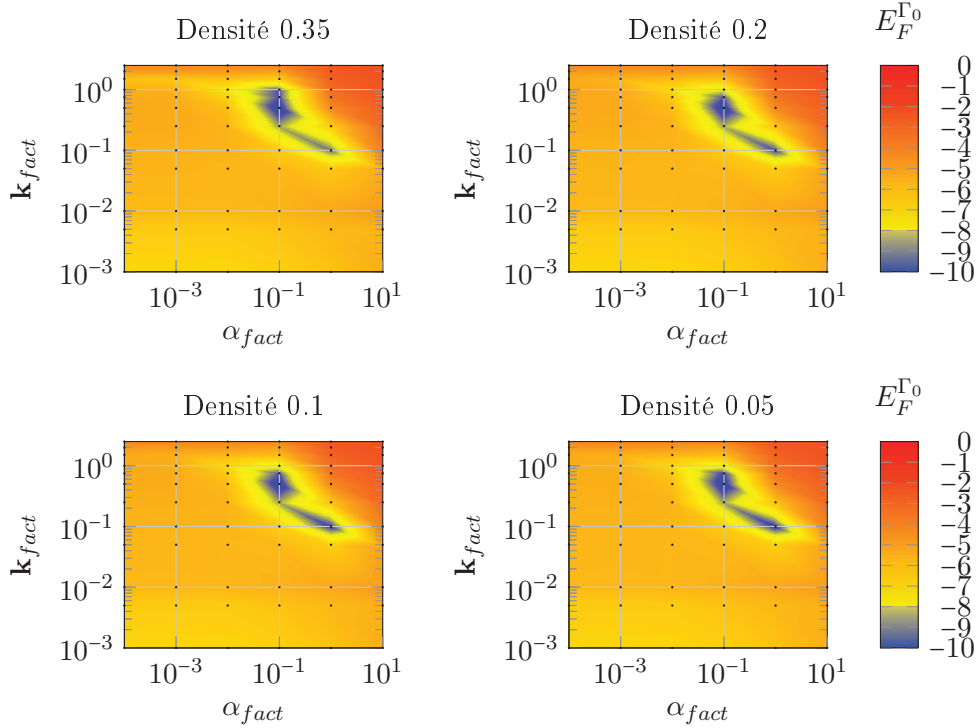


FIGURE B.9 – Résultats de l'étude paramétrique en effort pour le facteur d'échelle 2.

Titre : Une stratégie de décomposition de domaine mixte et multiéchelle pour le calcul des assemblages.

Mots clés : Décomposition de domaine, Multiéchelle, Méthode LaTIn.

Résumé : Dans un contexte de grande concurrence internationale, la simulation numérique du comportement joue un rôle primordial dans le domaine aéronautique, permettant de réduire les délais et les coûts de conception, d'évaluer la pertinence de nouvelles solutions technologiques avant de se lancer dans les investissements qu'elles imposent. Visant la simulation de structures assemblées, ce travail de thèse a consisté à développer une méthode de décomposition de domaine mixte, multiéchelle, s'appuyant sur le solveur LaTIn. Afin de simplifier le traitement discret des quantités d'interface, la méthode proposée utilise un représentant des interefforts qui évolue dans le même espace que les déplacements d'interface ($H^{1/2}$).

Elle s'appuie sur le produit scalaire associé à ces quantités pour le calcul des travaux d'interface. Délicat à calculer, ce produit scalaire est traité par une approximation validée numériquement. Le calcul de la matrice de masse pleine en découlant est récompensé par un taux de convergence montré indépendant du pas du maillage et de la taille des sous-domaines sur plusieurs cas-tests faisant intervenir notamment du contact..

Title : A mixed multiscale decomposition method for assemblies.

Keywords : Domain decomposition, Multiscale, Méthode LaTIn

Abstract : Mechanical industries' need of liability in numerical simulations leads to evermore fine and complex models taking into account complicated physical behaviours. With the aim of modelling large complex structures, a non-overlapping mixed domain decomposition method based on a LaTIn-type iterative solver is proposed.

The method relies on splitting the studied domain into substructures and interfaces which can both bear mechanical behaviors so that perfect cohesion, contact, delamination can be modelled by the interfaces. The associated solver enables to treat at small scales nonlinear phenomena and, as commonly done, scalability is ensured by a coarse problem.

The method presented uses the Riesz representation theorem to represent interface tractions in $H^{1/2}$ in order to discretize them accordingly to the displacements. Independence of convergence and search direction's optimal value from mesh size is evidenced and high precision can be reached in few iterations. Different test-cases assess the method for perfect and contact interfaces.